Простѣйшіе случаи движенія тяжелаго несимметричнаго гироскопа С. В. Ковалевской.

Часть II.

Г. Г. Аппельрота.

Сообщено въ засѣданіи Математическаго Общества 27 апрѣля 1910 года).

МОСКВА.
Типографія Императорскаго Московскаго Университета.
1911.

Математическій Сборникъ. Т. XXVII, в. IV.

ПРОСТѢЙШІЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНІЯ ТЯЖЕЛАГО НЕСИММЕТРИЧНАГО ГИРОСКОПА С. В. КОВАЛЕВСКОЙ.

Статья вторая.

Г. Г. Аппельрота.

(Сообщено ¹) въ засѣданіи Математическаго Общества 27 апрѣля 1910 г.).

ГЛАВА I.

Вступительныя замѣчанія. Задача обращенія для одного случая трояко-періодическихъ гиперэллиптическихъ функцій.

§ 1. Согласно неоднократно высказанному въ 1-ой статьѣ[2]) обѣщанію настоящая работа будетъ посвящена пополненію моихъ ранѣе опубликованныхъ изслѣдованій о простѣйшихъ движеніяхъ (2-го и 3-го классовъ) гироскопа С. В. Ковалевской.

Главнымъ образомъ я займусь въ ней болѣе глубокимъ изученіемъ движеній т. н. 2-й группы 2-го класса, какъ весьма важныхъ съ точки зрѣнія начертанія общей картины движенія разсматриваемаго твердаго тѣла, обращая при этомъ особое вниманіе на подробное и возможно наглядное разъ-

---

¹) Въ засѣданіи Общества были сообщены только главнѣйшіе результаты.

²) Математическій Сборникъ, томъ XXVII, в. III. Обозначенія этой статьи будутъ приняты и въ настоящей работѣ. Ссылки на нее указываются цифрой (1).

Считаю нужнымъ отмѣтить, что нумерація теоремъ, формулъ и чертежей настоящей статьи есть продолженіе соотвѣт. нумераціи статьи (1).

ясненіе тѣхъ законовъ явленія во времени, которые имѣютъ характеръ періодичности и т. о. какъ бы связываютъ совершенно своеобразную теорію гироскопа [1]) С. В. Ковалевской съ классическими теоріями движеній Эйлера-Пуансо и Лагранжа-Пуассона.

Особенно интереснымъ и важнымъ оказывается здѣсь свойство полярной оси (r) становиться вертикально черезъ строго опредѣленные промежутки времени [2]), свойство, которое, въ значительной мѣрѣ исчерпывая собою проявленія періодичности для гироскопа С. В. Ковалевской, существуетъ въ то же время (въ соотвѣт. измѣнен. формѣ) въ случаѣ вращенія по инерціи и (въ буквально той же) въ движеніи симметричнаго гироскопа Лагранжа, хотя уже какъ слѣдствіе болѣе общихъ законовъ того же періодическаго характера.

Дѣйствительно, на основаніи теоріи, т. с., классическихъ случаевъ вращенія твердаго тѣла около неподвижной точки намъ извѣстно, что, если взять сферу съ центромъ въ точкѣ опоры и радіусомъ, равнымъ мгновенной угловой скорости Ω вращенія (или же=главному моменту количества движенія J), и затѣмъ на поверхности ея построить сферическій треугольникъ съ вершинами на радіусахъ: одномъ, направленномъ по вектору Ω (или J), другомъ, неизмѣнно оріентированномъ въ пространствѣ (ось импульса для движеній Эйлера-Пуансо, 2) вертикаль для гироскопа Лагранжа), и третьемъ, неизмѣнно оріентированномъ въ вращающемся тѣлѣ (любое направленіе въ случаѣ Э.-Пуансо, 2) полярная ось (r) неравныхъ моментовъ инерціи для Лагранжева гироскопа), то какъ радіусъ взятой сферы, такъ и всѣ элементы разсматриваемыхъ треугольниковъ будутъ періодическими функціями времени (кромѣ случаевъ движеній, асимптотическихъ къ перманентнымъ вращеньямъ) для какого бы момента, какъ начальнаго, мы ни сдѣлали наши построенія.

---

[1]) Слово гироскопъ я употребляю здѣсь и далѣе въ болѣе обширномъ, чѣмъ обыкновенно, смыслѣ тяжелаго твердаго тѣла, вращающагося около неподвижной точки.

[2]) См. § 3 гл. III ст. 1.

Если же продѣлать построенье, подобное вышеописанному 2), для гироскопа С. В. Ковалевской, то никакой періодичности, вообще говоря, не будетъ наблюдаться[1]), кромѣ случая, когда за начальный моментъ выбранъ моментъ занятія осью (r) вертикальнаго положенья (т.-е. моментъ совпаденія 2-хъ вершинъ упомянутыхъ выше треугольниковъ, обращающихся тогда просто въ отрѣзокъ дуги большого круга). Тогда и тутъ, какъ я подробно разъясню въ главѣ II, будетъ наблюдаться строгая періодичность, *такъ что для гироскопа С. В. Ковалевской, аналогично съ гироскопомъ Лагранжа, всѣ его движенія (кромѣ асимптотическихъ къ перманентнымъ вращеніямъ) можно разбить какъ бы на 2 разряда: первый (движенія 2-й группы 2-го класса), когда полярная ось (r) періодически становится вертикальной, и второй, когда она всегда находится внѣ нѣкотораго конуса, описаннаго около вертикали (всѣ остальныя движенья).*

Такъ какъ другія черты періодичности, которыя обнаруживаются при простѣйшихъ движеніяхъ гироскопа С. В. Ковалевской, имѣютъ частное и сравнительно второстепенное значенье, то, лишь кратко указавъ нѣкоторыя изъ нихъ, второе мѣсто въ настоящей статьѣ я отведу болѣе подробному и точному[2]), чѣмъ въ моей первой работѣ, изложенію вопроса о различныхъ типахъ простѣйшихъ движеній 3-го класса и ихъ отношеніи къ исключительнымъ движеніямъ 1-го рода. *Наиболѣе цѣннымъ результатомъ здѣсь мнѣ представляется обнаруженіе существованія среди вообще неустойчивыхъ исключительныхъ движеній 1-го рода одного вида ихъ, устойчиваго въ томъ же приблизительно смыслѣ, какъ, напр., устойчивы движенія 1-го класса или 1-ой группы 2-го.*

Также не безъинтересно, б. м., указаніе отношенія исключительныхъ движеній 1-го рода къ движеніямъ типа Лагранжа-Пуассона.

---

[1]) См. § 1 Введенія ст. 1.

[2]) Въ настоящей работѣ (См. § 2а главы III) исправлена одна погрѣшность статьи 1, имѣющая мѣсто въ серединѣ § 2 главы IV этой статьи (Стр. 331, строки 3-10 сверху; въ отд. оттск. стр. 70).

Эта часть моихъ изысканій составитъ главное содержаніе главы III, гдѣ такъ же, какъ и во многихъ мѣстахъ II-ой главы, я буду пользоваться геометрическими свойствами сѣтей кривыхъ $s = const.$, какъ чрезвычайно удобнымъ средствомъ для внесенія возможной наглядности въ вопросъ.

На ряду съ указанными 2-мя главными задачами, для разъясненія, хотя и не совсѣмъ полнаго, которыхъ возможно было бы ограничиться лишь частичнымъ рѣшеньемъ дифференціальныхъ ур-ій С. В. Ковалевской, я коснусь, но далеко не исчерпывающимъ образомъ, и нѣкоторыхъ другихъ законовъ разсматриваемыхъ движеній, имѣя въ виду на данномъ весьма удобномъ для этой цѣли примѣрѣ еще разъ указать существованіе рѣзкаго различія между явленіями, коихъ законы хотя и выражаются математически, но въ одномъ случаѣ съ помощью періодическихъ или какихъ-либо асимптотическаго характера зависимостей, а въ другомъ съ помощью зависимостей, не подходящихъ подъ эти рубрики, съ которыми нашъ умъ очень часто склоненъ ошибочно отождествлять математическія законности вообще.

Такъ какъ нѣкоторое освѣщеніе вопроса съ этой стороны мнѣ представлялось довольно важнымъ и интереснымъ какъ съ точки зрѣнія болѣе яснаго пониманія законовъ изучаемаго явленія, такъ и съ общей точки зрѣнія углубленія самаго понятія математическихъ законовъ природы, то я въ интересахъ большей полноты и разносторонности своихъ изысканій въ основу настоящей работы положилъ возможно полное, хотя и безъ излишнихъ деталей, рѣшенье диф. ур-ій для разсматриваемыхъ простѣйшихъ движеній, полученье котораго не представляетъ особыхъ затрудненій въ виду совершенства, достигнутаго соотвѣтствующими отдѣлами чистой математики.

Чтобы при этомъ не слишкомъ обременять читателя справками въ различныхъ трактатахъ по теоріи функцій, я позволю себѣ начать свое изложенье съ рѣшенья той чисто-математической задачи, которая есть основная для нашего изслѣдованія при моемъ способѣ его веденья, а именно съ *рѣшенья* *задачи о выраженіи черезъ независимыя перемѣнныя гиперэллиптическихъ функцій I-го класса, соотвѣтствующихъ случаю нахожденія подъ радикаломъ 2-хъ равныхъ линейныхъ множителей.*

§ 2. Задача подобнаго рода впервые была рѣшена ученикомъ Якобія Розенгайномъ [1]) какъ для даннаго частнаго, такъ и для самаго общаго случая гиперэллиптическихъ функцій I-го класса, при чемъ, конечно, изъ формулъ, относящихся къ этому послѣднему въ томъ, напр., видѣ, какой имъ данъ въ мемуарѣ С. В. Ковалевской или особенно въ статьѣ F. Kötter'a [2]), можно было бы вывести и всѣ приводимые ниже результаты.

Но такъ какъ этотъ выводъ все равно потребовалъ бы извѣстнаго количества вычисленій, а пониманіе основныхъ формулъ полнаго знакомства съ теоріей гиперэллиптическихъ функцій, то я предпочелъ воспроизвести здѣсь рѣшенье Розенгайна лишь съ тѣмъ отъ него отличіемъ, что всѣ относящіяся сюда соображенья и обозначенья будутъ облечены мною въ формы, указанныя Вейерштрассомъ какъ для высшихъ трансцендентныхъ, такъ и для эллиптическихъ функцій, теоріи которыхъ одной будетъ достаточно для полнаго разъясненія вопроса.

Такимъ образомъ задача, которую я буду рѣшать въ настоящей главѣ, можетъ быть вкратцѣ формулирована такъ:

Найти выраженія въ функціи независимыхъ перемѣнныхъ τ_1 *и* τ_2 *интеграловъ* z_1 *и* z_2 *двухъ ур-ій съ полными дифференціалами:*

$$\begin{gathered}\frac{dz_1}{\sqrt{4z_1^3-g_2z_1-g_3}}+\frac{dz_2}{\sqrt{4z_2^3-g_2z_2-g_3}}=-d\tau_1,\\ \frac{dz_1}{(z_1-\bar{e}_4)\sqrt{4z_1^3-g_2z_1-g_3}}+\frac{dz_2}{(z_2-\bar{e}_4)\sqrt{4z_2^3-g_2z_2-g_3}}=-d\tau_2,\end{gathered}\tag{30}$$

---

[1]) Abhandlung über die Functionen zweier Variabler mit vier Perioden, welche die Inversen sind der ultra—elliptischen Integrale erster Klasse. 1851. Перепечатано въ пер. съ фр. въ серіи Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften. № 65. 1895.

[2]) Послѣдняя, неоднократно мною цитированная въ моей I-й работѣ, напечатана въ Acta Math. XVII. См. тамъ §§ 4, 5 и слѣд.

гдѣ g_2, g_3, e_4 *суть нѣкоторые постоянные параметры, а радикалы означаютъ двузначныя* 1) *функціи соотвѣтствующихъ* z.

Если положить: $z_1=\wp(u_1)$, $z_2=\wp(u_2)$, гдѣ $\wp(u)$ означаетъ эллиптическую функцію Вейерштрасса, а u_1 и u_2 новыя вспомогательныя перемѣнныя, то будемъ имѣть:

$$u_1+u_2=\tau_1+\tau_{10},$$

$$\frac{\sigma(u_1+v)\sigma(u_2+v)}{\sigma(u_1-v)\sigma(u_2-v)}=e^{2\zeta(v)(\tau_1+\tau_{10})-\wp'(v)(\tau_2+\tau_{20})}, \tag{31}$$

гдѣ $\tau_{1\,0}$ и $\tau_{2\,0}$ суть постоянныя интеграціи, а v опредѣляется какъ одинъ изъ корней ур-ія $\wp(v)=\bar{e}_4$, при чемъ предполагаемъ, что $4\bar{e}_4^3-g_2\bar{e}_4-g_3\neq 0$ 2).

Изъ 2-хъ послѣднихъ ур-ій мы могли бы опредѣлить u, а затѣмъ и z черезъ независимыя перемѣнныя τ, но для всѣхъ нашихъ изысканій будетъ *гораздо полезнѣе найти выраженія черезъ* τ *не самихъ* z, *а нѣкоторыхъ ихъ симметричныхъ функцій ирраціональнаго типа*, къ чему мы и приступимъ въ § 3.

§ 3. Именно сначала мы постараемся выразить черезъ τ три слѣдующихъ произведенья:

$$Z_\alpha=\sqrt{z_1-\bar{e}_\alpha}\sqrt{z_2-\bar{e}_\alpha}, \qquad (\alpha=1,\ 2,\ 3) \tag{32}$$

гдѣ $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ суть корни многочлена $4z^3-g_2z-g_3$, отмѣченные чертой сверху въ добавокъ къ обычнымъ 3) Вейерштрассовскимъ обозначеньямъ для отличія отъ примѣняющагося нами

---

1) Т. е. функціи. относящіяся однозначно къ точкамъ нѣкоторыхъ двухлепестныхъ поверхностей Римана. Подобное же замѣчаніе справедливо и для всѣхъ другихъ радикаловъ въ настоящей статьѣ, если не сдѣлано особой оговорки.

2) Случай, когда $4\bar{e}_4^3-g_2\bar{e}_4-g_3=0$, мы будемъ разсматривать какъ предѣльный, не входя однако для него въ подробности вычисленія.

3) Если всѣ корни дѣйствительны, то $\bar{e}_1>\bar{e}_2>\bar{e}_3$; если же 2 корня мнимы, то дѣйствит. будетъ $\bar{e}_2$.

и другими авторами обозначенья корней [1]) выраженья S^2 тоже черезъ e_α, а каждый радикалъ $\sqrt{z-\bar{e}_\alpha}$ какъ здѣсь, такъ и всюду далѣе, разсматривается какъ однозначная [2]) функція соотвѣтствующаго вспомогательнаго перемѣннаго u_1 или u_2:

$$\sqrt{z-\bar{e}_\alpha}=\sqrt{\wp(u)-\bar{e}_\alpha}=\frac{\sigma_\alpha(u)}{\sigma(u)}\ ^{3)}.$$

Для этой цѣли мы воспользуемся тѣмъ основнымъ ур-іемъ между функціями σ, которое Halphen [4]) назвалъ трехъ-членнымъ соотношеніемъ (équation à trois termes):

$$\begin{aligned}&\sigma(v'_1-v_1)\sigma(v'_1-v_2)\sigma(v'_1-v_3)\sigma(v'_2-v'_3)+\\ &+\sigma(v'_2-v_1)\sigma(v'_2-v_2)\sigma(v'_2-v_3)\sigma(v'_3-v'_1)+\\ &+\sigma(v'_3-v_1)\sigma(v'_3-v_2)\sigma(v'_3-v_3)\sigma(v'_1-v'_2)=0,\end{aligned}\tag{33}$$

гдѣ

$$v_1+v_2+v_3=v'_1+v'_2+v'_3.$$

Если положить [5]) въ немъ:

$$v'_1=\omega_\alpha,\ v'_2=0,\ v'_3=v,\ v_1=-u_1,\ v_2=-u_2,\ v_3=v+u_1+u_2+\omega_\alpha,$$

то будемъ имѣть:

$$\begin{aligned}&\sigma(v+u_1)\sigma(v+u_2)\sigma_\alpha(u_1+u_2)=\\ &=\sigma(u_1)\sigma(u_2)\sigma_\alpha(v+u_1+u_2)\sigma_\alpha(v)+\sigma_\alpha(u_1)\sigma_\alpha(u_2)\sigma(v+u_1+u_2)\sigma(v),\end{aligned}\tag{34}$$

откуда, раздѣливъ каждое изъ написанныхъ равенствъ (34)

---

[1]) См. Введеніе къ ст. 1.

[2]) Какъ функціи z они продолжаютъ быть двузначными, при чемъ между ними и радикалами въ ур-іяхъ (30) всегда существуетъ тождественное соотношеніе:

$$\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}=\sqrt{z-e_1}\ \sqrt{z-\bar{e}_2}\ \sqrt{z-e_3}.$$

[3]) Halphen. Traité des fonctions élliptiques. Tome I. Стр. 190.

[4]) Halphen. loco citato. Стр. 225.

[5]) При всѣхъ дѣйствительныхъ корняхъ $\bar{e}_\alpha$ обозначенья для полуперіодовъ ω обыкновенно таковы, что: $\wp(\omega)=e_1$, $\wp(\omega'')=\bar{e}_2$, $\wp(\omega')=\bar{e}_3$, дѣйствительнымъ полуперіодомъ является ω, а $\omega''=\omega+\omega'$; при одномъ дѣйствительномъ корнѣ $\bar{e}_2$: $\wp(\omega_1)=\bar{e}_1$, $\wp(\omega_2)=\bar{e}_2$, $\wp(\omega_3)=\bar{e}_3$ и дѣйствит. полуперіодъ $\omega_2=\omega_1+\omega_3$. Такъ какъ свойства соотвѣт. полуперіодовъ

на то, которое получится изъ него путемъ замѣны v черезъ $-v$, будемъ имѣть:

$$\frac{\sigma(u_1+v)\sigma(u_2+v)}{\sigma(u_1-v)\sigma(u_2-v)}=$$

$$=\frac{\sigma(u_1)\sigma(u_2)\sigma_\alpha(u_1+u_2+v)\sigma_\alpha(v)+\sigma_\alpha(u_1)\sigma_\alpha(u_2)\sigma(u_1+u_2+v)\sigma(v)}{\sigma(u_1)\sigma(u_2)\sigma_\alpha(u_1+u_2-v)\sigma_\alpha(v)-\sigma_\alpha(u_1)\sigma_\alpha(u_2)\sigma(u_1+u_2-v)\sigma(v)},$$

и, *если обозначить для краткости:*

$$u_1+u_2=\tau_1+\tau_{10}=u,\ a\ 2\zeta(v)(\tau_1+\tau_{10})-\wp'(v)(\tau_2+\tau_{20})=2w,$$

то на основанiи 2-го изъ ур-iй (31) получимъ:

$$e^{2w}=\frac{\sigma_\alpha(u+v)\sigma_\alpha(v)+Z_\alpha\sigma(u+v)\sigma(v)}{\sigma_\alpha(u-v)\sigma_\alpha(v)-Z_\alpha\sigma(u-v)\sigma(v)}. \qquad (34')$$

Отсюда

$$Z_\alpha=\frac{e^w\sigma_\alpha(u-v)-e^{-w}\sigma_\alpha(u+v)}{e^w\sigma(u-v)+e^{-w}\sigma(u+v)}\cdot\frac{\sigma_\alpha(v)}{\sigma(v)}\cdot \quad (\alpha=1,\ 2,\ 3) \qquad (35)$$

Далѣе, если обозначить:

$$Z_4=\sqrt{z_1-e_4}\sqrt{z_2-e_4}=\sqrt{\wp(u_1)-\wp(v)}\sqrt{\wp(u_2)-\wp(v)}, \qquad (35')$$

то [1])

$$Z_4=\frac{\sqrt{\sigma(u_1+v)\sigma(u_1-v)\sigma(u_2+v)\sigma(u_2-v)}}{\sigma(u_1)\sigma(u_2)\sigma^2(v)}.$$

На основанiи второго изъ соотношенiй (31) можемъ положить

$$Z_4=\frac{\sigma(u_1+v)\sigma(u_2+v)e^{-w}}{\sigma(u_1)\sigma(u_2)\sigma^2(v)}.$$

въ обоихъ случаяхъ вполнѣ аналогичны, то какъ здѣсь, такъ и всюду далѣе, мы будемъ придерживаться послѣдняго способа обозначенья (особо оговариваясь въ противномъ случаѣ), такъ что дѣйствительный полуперiодъ въ одномъ случаѣ будетъ ω_1, а въ другомъ ω_2.

[1]) Halphen. loco citato. Стр. 171. Формула 12.

Такъ какъ соотношеніе (34) при $\alpha = 1$ даетъ:

$$\frac{\sigma(u_1+v)\sigma(u_2+v)\sigma_1(u)}{\sigma(u_1)\sigma(u_2)\sigma_1(v)} = \sigma_1(u+v) + \frac{\sigma(v)}{\sigma_1(v)} \frac{\sigma_1(u_1)\sigma_1(u_2)\sigma(u+v)}{\sigma(u_1)\sigma(u_2)} =$$

$$= \sigma_1(u+v) + \frac{e^{w}\sigma_1(u-v) - e^{-w}\sigma_1(u+v)}{e^{w}\sigma(u-v) + e^{-w}\sigma(u+v)} \sigma(u+v),$$

послѣднее на основаніи первой изъ формулъ (34′), то

$$\frac{\sigma(u_1+v)\sigma(u_2+v)\sigma_1(u)}{\sigma(u_1)\sigma(u_2)\sigma_1(v)} = \frac{\sigma_1(u+v)\sigma(u-v) + \sigma_1(u-v)\sigma(u+v)}{e^{w}\sigma(u-v) + e^{-w}\sigma(u+v)} e^{w}. \quad (35'')$$

Изъ трехъ-членнаго соотношенія (33) имѣемъ, полагая въ немъ:

$$v'_1 = u + \omega_1,\; v'_2 = 0,\; v'_3 = -\omega_3,\; v_1 = v,\; v_2 = \omega_1 - v,\; v_3 = u - \omega_3,$$

$$\sigma_1(u-v)\sigma(u+v) = \sigma_3(v)\sigma_2(v)\sigma(u)\sigma_1(u) +$$

$$+ \sigma(v)\sigma_1(v)\sigma_3(u)\sigma_2(u),$$

или послѣ сложенія послѣдняго равенства съ тѣмъ, которое получится изъ него послѣ замѣны v черезъ $-v$:

$$\sigma_1(u-v)\sigma(u+v) + \sigma_1(u+v)\sigma(u-v) = 2\sigma_2(v)\sigma_3(v)\sigma(u)\sigma_1(u).$$

Въ силу этого соотношенія и равенства (35″) получимъ:

$$Z_4 = \frac{2\sigma(u)}{e^{w}\sigma(u-v) + e^{-w}\sigma(u+v)} \frac{\sigma_1(v)\sigma_2(v)\sigma_3(v)}{\sigma^2(v)}. \quad (36)$$

Равенства (35) и (36) дадутъ намъ искомыя выраженія 4-хъ функцій Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 черезъ независимыя перемѣнныя τ, ибо аргументы u и w линейно зависятъ отъ τ.

Выраженія эти оказываются однозначными мероморфными функціями независимыхъ перемѣнныхъ, или, что иногда удобнѣе, аргументовъ u *и* w.

§ 3a. Въ этомъ параграфѣ мы займемся выводомъ аналогичныхъ выраженій для новыхъ болѣе сложныхъ по составу семи симметричныхъ ирраціональныхъ функцій отъ z_1 и z_2, чѣмъ будетъ вполнѣ исчерпанъ кругъ функцій, необходимыхъ для дальнѣйшаго.

Если обозначить для краткости:

$$\overline{S}=(z-\overline{e}_4)\sqrt{z-\overline{e}_1}\;\sqrt{z-\overline{e}_2}\;\sqrt{z-\overline{e}_3},$$

то такими новыми функціями будутъ:

$$Z_{\alpha\,\delta}=\frac{Z_\alpha\;Z_\delta}{z_1-z_2}\left\{\frac{\overline{S}_1}{(z_1-\overline{e}_\alpha)(z_1-\overline{e}_\delta)}-\frac{\overline{S}_2}{(z_2-\overline{e}_\alpha)(z_2-\overline{e}_\delta)}\right\} \qquad (36')$$

$$\begin{pmatrix} \alpha\neq\delta \\ \alpha=1,2,3 \\ \delta=1,2,3,4 \end{pmatrix}$$

и функція $Z_{4\,4}$, которая получится изъ предыдущаго равенства, если въ немъ положить $\alpha=\delta=4$.

Въ виду того, что, какъ это очевидно, индексы α и δ могутъ быть переставляемы безъ измѣненія величины соотвѣтствующихъ выраженій, новыхъ функцій будетъ, дѣйствительно, семь.

Такъ какъ въ силу формулъ, выражающихъ теорему сложенія для эллиптическихъ функцій σ, будемъ имѣть:

$$\frac{\sigma_\alpha(u)}{\sigma(u)}=\frac{\sigma(u_1)\sigma_\alpha(u_1)\sigma_\beta(u_2)\sigma_\gamma(u_2)-\sigma(u_2)\sigma_\alpha(u_2)\sigma_\beta(u_1)\sigma_\gamma(u_1)}{\sigma^2(u_1)\sigma_1{}^2(u_2)-\sigma^2(u_2)\sigma_1{}^2(u_1)},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha,\beta,\gamma=1,2,3 \\ \alpha\neq\beta\neq\gamma \end{pmatrix}$$

то

$$\frac{\sigma_\alpha(u)}{\sigma(u)}=\frac{\sqrt{z_1-\overline{e}_\alpha}\;\sqrt{z_2-\overline{e}_\beta}\;\sqrt{z_2-\overline{e}_\gamma}-\sqrt{z_2-\overline{e}_\alpha}\;\sqrt{z_1-\overline{e}_\beta}\;\sqrt{z_1-\overline{e}_\gamma}}{z_2-z_1},$$

откуда безъ затрудненія получимъ:

$$Z_{\alpha 4}=Z_4\frac{\sigma_\alpha(u)}{\sigma(u)}=\frac{2\sigma_\alpha(u)}{e^{v}\sigma(u-v)+e^{-v}\sigma(u+v)}\,\frac{\sigma_1(v)\sigma_2(v)\sigma_3(v)}{\sigma^2(v)}. \qquad (37)$$

Далѣе, какъ въ этомъ легко убѣдиться, будемъ тождественно имѣть:

$$Z_{44}=\frac{Z_1(\overline{e}_4-\overline{e}_2)\sigma_1(u)-Z_2(\overline{e}_4-\overline{e}_1)\sigma_2(u)}{(\overline{e}_1-\overline{e}_2)\sigma(u)}=\frac{Z_1\sigma_2{}^2(v)\sigma_1(u)-Z_2\sigma^2{}_1(v)\sigma_2(u)}{(\overline{e}_1-\overline{e}_2)\sigma^2(v)\sigma(u)}.$$

Такъ какъ изъ ур-ія (33), полагая въ немъ: $v_1'=\omega_1$, $v_2'=0$, $v_3'=u\pm v+\omega_1, v_1=u$, $v_2=\pm v-\omega_3$, $v_3=2\omega_1+\omega_3$, **получимъ:**

$$\left[\sigma(\omega_1)\sigma(\omega_1+\omega_3)\right]^2\left[\sigma_2(v)\sigma_1(u)\sigma_1(u\pm v)-\sigma_1(v)\sigma_2(u)\sigma_2(u\pm v)\right]=$$
$$=\sigma(u)\sigma_3(v)\sigma(u\pm v)\left[\sigma(\omega_3)e^{\eta_1(\omega_1+\omega_2)}\right]^2,$$

то

$$Z_{4\,4}=-\frac{e^w\sigma(u-v)-e^{-w}\sigma(u+v)}{e^w\sigma(u-v)+e^{-w}\sigma(u+v)}\cdot\frac{\sigma_1(v)\sigma_2(v)\sigma_3(v)}{\sigma^3(v)}. \qquad (38)$$

Для опредѣленія оставшихся Z **воспользуемся легко доказуемымъ тождествомъ:**

$$Z_{\alpha\,\beta}=Z_{\beta\,\alpha}=\frac{\sigma_\gamma(u)}{\sigma(u)}(\bar{e}_4-\bar{e}_\alpha)+Z_\alpha\frac{\sigma_\beta(u)}{\sigma(u)}.\quad\begin{pmatrix}\alpha,\,\beta,\,\gamma=1,\,2,\,3\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma\end{pmatrix} \qquad (39)$$

Отсюда на основаніи равенствъ (35) **имѣемъ:**

$$Z_{\alpha\beta}=\frac{\sigma_\alpha(v)}{\sigma(v)}\times$$

$$\cdot\frac{[e^w\sigma(u-v)+e^{-w}\sigma(u+v)]\sigma_\gamma(u)\sigma_\alpha(v)+[e^w\sigma_\alpha(u-v)+e^{-w}\sigma_\alpha(u+v)]\sigma_\beta(u)\sigma(v)}{[e^w\sigma(u-v)+e^{-w}\sigma(u+v)]\sigma(u)\sigma(v)}.$$

Изъ соотношенія (33), полагая въ немъ: $v'_\alpha=u\pm v-\omega_\alpha$, $v'_\beta=\omega_\beta$, $v'_\gamma=0$, $v_\alpha=-\omega_\alpha$, $v_\beta=u$, $v_\gamma=\pm v+\omega_\beta$, **получимъ:**

$$\sigma(u)\sigma_\beta(v)\sigma_\gamma(u\pm v)=\sigma_\gamma(u)\sigma_\alpha(v)\sigma(u\pm v)\mp\sigma_\beta(u)\sigma(v)\sigma_\alpha(u\pm v).$$

На основаніи этого равенства послѣ легкихъ преобразованій будемъ имѣть слѣдующее окончательное выраженіе для опредѣляемаго нами послѣдняго типа функціи Z:

$$Z_{\alpha\,\beta}=\frac{e^w\sigma_\gamma(u-v)+e^{-w}\sigma_\gamma(u+v)}{e^w\sigma(u-v)+e^{-w}\sigma(u+v)}\cdot\frac{\sigma_\alpha(v)\sigma_\beta(v)}{\sigma^2(v)}. \qquad (39')$$

Съ выводомъ формулъ (37), (38) и (39') мы можемъ считать рѣшеніе поставленной въ § 2 задачи законченнымъ.

§ 4. **Оказывается**, что *всѣ разсматриваемыя нами 11 симметричныхъ ирраціональныхъ функцій отъ* z_1 **и** z_2 *являются однозначными мероморфными функціями независимыхъ перемѣнныхъ* τ_1, τ_2 *или, что то же, аргументовъ* u **и** w.

Функціи эти связаны между собою рядомъ простыхъ уравненій 2-ой степени (числомъ 9), которыя легко получатся, если исключить изъ равенствъ (32), (35′) и (36′) перемѣнныя z_1 и z_2.

Онѣ обладаютъ по отношенію къ аргументамъ u и w (или τ_1 и τ_2) [1]) тѣмъ замѣчательнымъ свойствомъ, что существуетъ три пары величинъ (пары совмѣстныхъ періодовъ) такихъ, что, если одновременно прибавить къ значеньямъ соотвѣтственныхъ аргументовъ u и w одно и то же кратное число такихъ періодовъ, то величина разсматриваемой функціи Z останется безъ измѣненія.

Такимъ образомъ всѣ выведенныя нами функціи 2-хъ аргументовъ суть трояко-періодическія, при чемъ пары совмѣстныхъ періодовъ почти одинаковы для всѣхъ 11 функцій, различаясь иногда только на числовой факторъ 2.

Слѣдующія равенства лучше всего пояснятъ намъ характеръ этой періодичности:

$$\left.\begin{aligned}
&Z_\alpha(w+2\eta_\alpha v,\ u+2\omega_\alpha)=Z_\alpha(w,\ u),\\
&Z_\alpha(w+2\eta_\beta v,\ u+2\omega_\beta)=-Z_\alpha(w,\ u),\\
&Z_4(w+2\eta_\alpha v,\ u+2\omega_\alpha)=Z_4(w,\ u),\\
&Z_{\alpha\,4}(w+2\eta_\alpha v,\ u+2\omega_\alpha)=Z_{\alpha\,4}(w,\ u),\\
&Z_{\alpha\,4}(w+2\eta_\beta v,\ u+2\omega_\beta)=-Z_{\alpha\,4}(w,\ u),\\
&Z_{4\,4}(w+2\eta_\alpha v,\ u+2\omega_\alpha)=Z_{4\,4}(w,\ u),\\
&Z_{\alpha\beta}(w+2\eta_\alpha v,\ u+2\omega_\alpha)=-Z_{\alpha\beta}(w,\ u)=-Z_{\beta\alpha}(w,\ u),\\
&Z_{\alpha\beta}(w+2\eta_\gamma v,\ u+2\omega_\gamma)=Z_{\alpha\beta}\ (w,\ u)
\end{aligned}\right\}\ \begin{pmatrix}\alpha,\beta,\gamma=1,2,3\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma\end{pmatrix}\qquad(40)$$

и также: для всякаго $Z\ (w+i\pi,\ u)=Z(w,\ u)$, кромѣ Z_4 и $Z_{\alpha 4}$, для которыхъ $Z\ (w+i\pi,\ u)=-Z(w,\ u)$.

Всѣ указанныя свойства функцій Z будутъ весьма полезны при изслѣдованіи законовъ вращенья гироскопа С. В. Ковалевской въ интересующихъ насъ случаяхъ простѣйшихъ движеній.

---

[1]) Періоды по отношенію независимыхъ перемѣнныхъ τ представляютъ линейныя комбинаціи періодовъ по отношенію къ u и w.

Въ виду этого съ цѣлью облегчить дальнѣйшія изысканія я позволю себѣ привести еще новую формулировку равенствъ (40), выясняющую законы измѣненія разсматриваемыхъ функцій при измѣненіи на періодъ только одного аргумента, равно какъ отмѣтить тѣ примѣчательныя значенія, которыя пріобрѣтаютъ эти функціи при $u=\omega_\alpha$, что сдѣлаетъ возможнымъ болѣе быстрое и наглядное производство вычисленій въ послѣдующемъ.

Измѣненіе формулировки равенствъ (40) легко будетъ достигнуто, если аргументу w въ нихъ придать значеніе $w-2\eta v$.

Тогда будемъ имѣть:

$$Z(w,u+2\omega)=\pm Z(w-2\eta v,u) \tag{40'}$$

съ простановкой индексовъ α, β, γ, 4 и знаковъ $+$ или $-$ передъ 2-ой частью сообразно съ равенствами (40).

Замѣняя же въ формулахъ (35), (36), (37), (38), (39') арментъ u черезъ ω съ индексами α, β, γ (1, 2, 3), получимъ:

$$\begin{gathered}
Z_\alpha(w,\omega_\alpha)=\sqrt{e_\alpha-e_\beta}\ \sqrt{e_\sigma-e_\gamma},\\
Z_\alpha(w,\omega_\beta)=\frac{\sigma_\alpha(v)\sigma_\gamma(v)}{\sigma_\beta(v)\sigma(v)}\sqrt{e_\beta-e_\alpha}\ \operatorname{tgh}(w-\eta_\beta v)\ ^{1)},\\
Z_4(w,\omega_\alpha)=\frac{\sigma_\beta(v)\sigma_\gamma(v)}{\sigma^2(v)}\ \frac{1}{\cosh(w-\eta_\beta v)},\\
Z_{\alpha 4}(w,\omega_\alpha)=0,\\
Z_{\alpha 4}(w,\omega_\beta)=\frac{\sigma_\alpha(v)\sigma_\gamma(v)}{\sigma^2(v)}\ \frac{1}{\cosh(w-\eta_\beta v)}\sqrt{e_\beta-e_\alpha},\\
Z_{44}(w,\omega_\alpha)=-\frac{\sigma_1(v)\sigma_2(v)\sigma_3(v)}{\sigma^3(v)}\ \operatorname{tgh}(w-\eta_\alpha v),
\end{gathered} \tag{41}$$

---

1) Tgh, cosh означаютъ гиперболическіе tg и cos, т. е. $\operatorname{tgh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\operatorname{tgh}=\frac{\operatorname{snh}}{\cosh}$.

$$Z_{\alpha\beta}(w,\omega_\gamma)=\frac{\sigma_\alpha(v)\sigma_\beta(v)}{\sigma_\gamma(v)\sigma(v)}\ \mathrm{tgh}(w-\eta_\gamma v)\sqrt{e_\gamma-e_\alpha}\sqrt{e_\gamma-e_\beta},$$

$$Z_{\alpha\beta}(w,\omega_\alpha)=\left[\frac{\sigma_\beta(v)}{\sigma(v)}\right]^2\sqrt{e_\alpha-e_\gamma}=Z_{\beta\alpha}(w,\omega_\alpha),$$

гдѣ значенія входящихъ въ формулы радикаловъ опредѣляются согласно съ правилами теоріи эллиптическихъ функцій Вейерштрасса.

Этимъ я закончу чисто-математическую часть своей работы и теперь перейду къ тѣмъ изысканіямъ о свойствахъ простѣйшихъ движеній гироскопа С. В. Ковалевской, которыми я хотѣлъ бы пополнить свои ранѣе о томъ опубликованные результаты.

На первую очередь я поставлю здѣсь разсмотрѣніе движеній 2-ой группы 2-го класса.

ГЛАВА II.

Основныя свойства движеній 2-ой группы 2-го класса.

§ 1. Въ своей первой статьѣ (см. тамъ § 3 гл. II и гл. III) я уже указалъ, сколько мы имѣемъ различныхъ типовъ движеній 2-го класса, и вкратцѣ охарактеризовалъ особенности каждаго, но детальное изученье произвелъ только для случая т. н. особо-замѣчательныхъ движеній.

Въ настоящій моментъ я займусь болѣе подробнымъ разъясненіемъ явленія и особенно изысканіемъ основныхъ, наиболѣе важныхъ и характерныхъ свойствъ, общихъ всѣмъ движеніямъ т. н. мною 2-ой группы 2-го класса, свойствъ, обнаруженіе которыхъ преимущественно въ законахъ колебанія полярной оси выставляетъ чрезвычайно нагляднымъ образомъ на видъ элементы періодичности, еще сохранившіеся въ движеніи гироскопа С. В. Ковалевской, и является наиболѣе цѣннымъ результатомъ моихъ трудовъ съ точки зрѣнія общей теоріи этого гироскопа.

Прежде всего я постараюсь дать нѣкоторыя дополненія къ отчасти сдѣланной въ ст. 1 предварительной характеристикѣ траэкторій точки Ω_1 для различныхъ типовъ движеній 2-ой группы, кромѣ исключительнаго случая 2-го рода, гдѣ я удовольствуюсь уже сказаннымъ.

Въ случаѣ ($2a$) (см. ст. 1), если $l^2>k$, движеніе, какъ извѣстно, будетъ асимптотически приближаться къ особо-замѣчательному, соотвѣтствующему постоянному значенію $s_1=e_1=e_4=2l^2$ и для котораго всегда $r\neq0$. Тутъ траэкторія точки Ω_1 въ силу неравенствъ (9) и (13) будетъ вся лежать по одну какую-либо сторону окружности $s_1=2l^2$, т.-е. или внутри или внѣ ея, въ части плоскости (poq), заключенной между кругомъ $s_1=2l^2$ и соотвѣтствующей кривой $s_1=e_5$, состоящей здѣсь изъ 2-хъ отдѣльныхъ оваловъ[1]), охватывающихъ кругъ $s_1=2l^2$ снаружи и внутри.

Разсматриваемая траэкторія будетъ только 1 разъ прикасаться къ соотвѣтствующему овалу $s_1=e_5$, но безконечное число разъ пересѣкать[2]) ось p($q=0$ для $s_2=-\infty$) и окружность $s_2=e_3$, охватывая все болѣе и болѣе тѣсно подходящими кольцами траэкторію особо-замѣчательнаго движенья—окружность $s_1=2l^2$.

Въ томъ же случаѣ (2a), если $k>l^2$, т. е. когда простѣйшія движенія даннаго типа будутъ асимптотически стремиться къ такому особо-замѣчательному: $s_2=2l^2=e_4=e_3$ во все время

---

[1]) См. чертежъ 1 въ моей первой статьѣ. На основаніи равенствъ (6) нетрудно усмотрѣть, что кривыя $s_1=$const. (const.$>e_1$) въ данномъ случаѣ, какъ и вообще въ случаѣ сѣти 1-го вида, состоитъ каждая (кромѣ круга $s_1=e_1$) изъ 2-хъ отдѣльныхъ овалообразныхъ кривыхъ, симметричныхъ относительно оси p, помѣщающихся одна внѣ, а другая внутри круга $s_1=e_1$, не пересѣкающихся между собою, но непремѣнно пересѣкающихъ окружность $s_2=e_3$ и заключающихъ внутри себя точки f_1, f_4, а внѣ точки f_3, f_2.

Чтобы чертежъ 1 вполнѣ соотвѣтствовалъ тексту, его должно дополнить здѣсь проведеньемъ второго овала (названье овалъ употребляется лишь въ смыслѣ приблизительной характеристики формы) внутри круга $s_1=e_1$. Такъ лежащіе овалы мы будемъ наз. внутренними въ отличіе отъ внѣшнихъ (относительно того же круга). Далѣе въ нѣкоторыхъ случаяхъ гл. III дополненіе должно быть еще значительнѣе такъ, чтобы имѣть внѣ и внутри круга $s_1=e_1$ по 2 овала (для кривыхъ $s_1=e_4$ и $s_1=e_5$).

Подъ именемъ чертежа 1 мы будемъ всюду далѣе подразумѣвать именно надлежаще дополненный чертежъ.

Что касается кривыхъ $s_2=$const. ($e_3>$const.$>-\infty$), то онѣ тоже нигдѣ другъ съ другомъ не пересѣкаются (какъ это справедливо вообще для каждой системы кривыхъ $s=$const.) и для сѣти 1 всегда состоятъ каждая изъ 2-хъ частей: 1-го овала внутри круга $s_2=e_3$ и другой вѣтви внѣ этого круга, всегда пересѣкающихъ кругъ $s_1=e_1$ и симметр. относительно оси p. Отрѣзки дѣйствит. оси f_3f_4 и f_1f_2 соотвѣтствуютъ крайнему значенію $s_2=-\infty$.

[2]) Прикосновенье здѣсь невозможно также, какъ точка возврата, ибо одновременно съ $q=0$ не имѣемъ $\frac{dq}{dt}=0$, что бываетъ только въ исключительныхъ движеніяхъ 1-го рода. См. теорему IIa(1).

движенья, для котораго всегда $q \neq 0$, то траэкторія точки Ω_1 будетъ вся лежать[1]) по одну какую-либо сторону окружности $s_2=2l^2$ въ части плоскости, заключенной между двумя овалами $s_1=e_5$, идущими одинъ внѣ, а другой внутри окружности $s_1=e_1$.

Такая траэкторія будетъ только одинъ разъ пересѣкать ось p (въ моментъ, когда $s_2=-\infty$), но безконечное число разъ прикасаться то къ одному, то къ другому овалу $s_1=e_5$, пересѣкая[2]) въ промежуткѣ между 2-мя прикосновеньями окружность $s_1=e_1$.

При возрастаніи t къ $+\infty$ траэкторія точки Ω_1 будетъ приближаться къ одной дугѣ круга $s_2=2l^2$, заключенной между овалами $s_1=e_5$, а при $t=-\infty$ къ другой дугѣ, симметричной съ первой относительно оси p, такъ что каждая изъ двухъ кривыхъ, могущихъ представлять подвижный годографъ соотвѣтственнаго особо-замѣчательнаго движенья, будетъ асимптотическимъ предѣломъ подвижнаго годографа любого простѣйшаго движенья, одна для положительнаго, другая для отрицательнаго возрастанья времени.

Для не асимптотическаго движенья ($2b$), когда особо-замѣчательныхъ движеній нѣтъ, траэкторія точки Ω_1 будетъ вся лежать въ части плоскости (poq), заключенной между 2-мя овалами $s_1=e_5$, охватывающими кругъ $s_1=e_1$ (см. дополненный по предыд. чертежъ 1 (1)).

Она будетъ безконечное число разъ поперемѣнно пересѣ-

---

[1]) См. тотъ же чертежъ 1 ст. 1.

[2]) Прикосновенье невозможно, ибо $tg\vartheta \neq 0$ (См. § 4 Введенья (1)). Точка возврата $\left(\frac{dp}{dt}=\frac{dq}{dt}=0\right)$ также невозможна, ибо здѣсь нельзя имѣть одновременно ни $q=\frac{dq}{dt}=0$, ни $r=\gamma''=0$.

Послѣднее въ силу 3-го изъ ур-ій (12) возможно только въ моментъ, когда $s_1+s_2-e_4-e_5=0$, но изъ неравенствъ (13) вытекаетъ, что тогда $s_1=e_5, s_2=e_4$ одновременно, чего нѣтъ при разсматриваемомъ пересѣченіи. Отсюда слѣдуетъ также, что въ случаѣ ($2a$) траэкторія точки Ω_1 вообще не представляетъ точекъ возврата, какъ и во всѣхъ другихъ не особо-замѣчат. движеніяхъ второго класса.

кать ось p и окружность $s_2=e_3$, нигдѣ не имѣя точекъ возврата, но зато безконечное же число разъ касаясь попеременно то одного, то другого изъ оваловъ $s_1=e_5$ съ непремѣннымъ промежуточнымъ пересѣченьемъ круга $s_1=e_1$.

§ 2. Во всѣхъ [1]) вышеразсмотрѣнныхъ случаяхъ равно какъ и въ исключительномъ случаѣ 2-го рода, не смотря на второстепенныя различія, можно однако указать нѣкоторыя весьма важныя общія свойства какъ въ конфигураціи сѣтей кривыхъ s=const. особенно въ части ихъ, являющейся, т.-с., ареной дѣйствит. движеній, т.-е. удовлетворяющей условію $e_5>s_1$, такъ и въ свойствахъ траэкторій точки Ω_1.

Свойства эти сводятся 1) къ нѣкоторымъ простымъ, но интереснымъ особенностямъ расположенья относительно кривыхъ сѣти окружности: $x_1x_2=p^2+q^2=k$, на коей должна находиться точка Ω_1 въ моментъ вертикальности оси (r) (см. теорему VIIIa), и 2) къ нѣкоторымъ характернымъ собенностямъ расположенія траэкторій Ω_1 относительно той же окружности.

Для лучшаго уясненія всей картины я представлю здѣсь свои выводы въ рядѣ теоремъ, сначала занявшись свойствами 1) рода.

Теорема X. *Для всѣхъ типовъ сѣтей кривыхъ s=const., соотвѣтствующихъ движеніямъ 2-ой группы 2-го класса, точки пересѣченія окружности $x_1x_2=k$ съ дѣйствительной осью (p) принадлежатъ къ числу точекъ пересѣченія съ той же осью оваловъ $s_1=e_5$.*

Дѣйствительно, полагая $q=0$ въ первомъ изъ выраженій (6), получимъ согласно изложенному въ началѣ § 1 главы I первой статьи:

$$s_1-3l_1=-\frac{R_1(x,x)}{2R(x)}, \quad x=p.$$

---

[1]) Переходные къ 3-му классу случаи будутъ мною разсматриваться въ главѣ III вмѣстѣ съ прочими движеніями 3-го класса, но такъ какъ ихъ можно трактовать какъ предѣльные, то всѣ выводы настоящей главы, поскольку они сохраняютъ при этомъ свой смыслъ, имѣютъ силу и для такихъ переходныхъ движеній.

Если $3l_1=2l^2+k$, **а** $s_1=e_5=2(l^2+k)$, **то предыдущее равенство даетъ:**

$$2(p^2-k)[(l^2+k)p^2+2lp+1-k(l^2+k)]=0;$$

откуда: $p_1=+\sqrt{k}$, $p_2=-\sqrt{k}$,

$$p_3=\frac{-l+\sqrt{k[(l^2+k)^2-1]}}{l^2+k}\,,\quad p_4=\frac{-l-\sqrt{k[(l^2+k)^2-1]}}{l^2+k}\,.$$

Но точки $p=\pm\sqrt{k}$ и суть точки пересѣченія круга $x_1x_2=k$ съ осью p.

Слѣдовательно, теорема доказана.

Замѣчаніе I. Для исключительныхъ движеній 2-го рода, т.-е. когда $l^2+k<1$. остальныя 2 точки (p_3 и p_4) пересѣченія оваловъ $s_1=e_5$ съ осью p мнимы. Въ этомъ случаѣ согласно съ съ чертежомъ вторымъ [1]) ст. 1 мы имѣемъ только одинъ дѣйствительный овалъ $s_1=e_5$, черезъ обѣ точки пересѣченія котораго съ осью p и проходитъ такимъ образомъ окружность $x_1x_2=k$.

Для прочихъ типовъ движеній 2-ой группы 2-го класса всѣ 4 точки (p_1, p_2, p_3, p_4) будутъ дѣйствительны, причемъ *двѣ изъ нихъ будутъ точками пересѣченія съ осью* p *внѣшняго по отношенію къ кругу* $s_1=e_1$ *овала* $s_1=e_5$, *а другія двѣ внутренняго.*

Какія изъ точекъ (p_1, p_2, p_3, p_4) будутъ принадлежать внѣшнему, какія внутреннему овалу, всего проще будетъ установить послѣ доказательства послѣдующихъ теоремъ, которыми, какъ мнѣ кажется, достаточно разъясняется вопросъ о взаимномъ расположеніи круга $x_1x_2=k$ и элементовъ сѣтей $s=\text{const}$.

Теорема XI. *Кромѣ указанныхъ въ теоремѣ X не существуетъ никакихъ другихъ точекъ, общихъ у оваловъ* $s_1=e_5$ *съ окружностью* $x_1x_2=k$.

---

[1]) На фигурѣ (2) кривыя $s=\text{const}$. состоятъ каждая изъ только одной дѣйствит. линіи. Отрѣзокъ дѣйствит. оси f_1f_2 соотвѣтствуетъ здѣсь значенію $s_2=-\infty$. Для остальныхъ кривыхъ сѣти значенія s_1 измѣняются отъ e_1 до $+\infty$, а s_2 отъ $-\infty$ до e_1.

Для доказательства составимъ выраженіе черезъ x_1 и x_2 для: $(s_1-e_5)(s_2-e_5)-1$.

На основаніи равенствъ (6) послѣ нѣкоторыхъ преобразованій получимъ, полагая $3l_1=2l^2+k$:

$$(x_1-x_2)^2[(s_1-e_5)(s_2-e_5)-1]=4(k-x_1x_2)[(k+l^2)(k-x_1x_2)+$$
$$+l(x_1+x_2)+1]. \qquad (42)$$

Если $x_1 \neq x_2$, но $x_1x_2=k$, то должно имѣть:

$$(s_1-e_5)(s_2-e_5)-1=0,$$

при чемъ s_2 непремѣнно конечно.

Но тогда при $s_1=e_5$ предыдущее равенство даетъ $1=0$, чего быть не можетъ.

Слѣдовательно, у нашей окружности нѣтъ другихъ общихъ точекъ съ овалами $s_1=e_5$, кромѣ лежащихъ на дѣйствительной оси.

Замѣчаніе II. Въ силу симметріи относительно оси (p) точки p_1 и p_2 суть точки прикосновенія окружности $x_1x_2=k$ и оваловъ $s_1=e_5$ кромѣ случаевъ (см. далѣе гл. III), когда овалъ имѣетъ здѣсь точку возврата.

Теорема XII. *Точки пересѣченія круга $x_1x_2=k$ и тѣхъ окружностей $s=l^2+k\pm\sqrt{(l^2+k)^2-1}=e_\alpha$ $(\alpha\leq3)$, которыя существуютъ въ сѣтяхъ кривыхъ $s=\text{const.}$, будутъ дѣйствительны для не переходныхъ къ 3-му классу случаевъ только при условіи $1<4kl^2$, т.-е. въ случаѣ (2b) не асимптотическаго движенія.*

Терема XII'. *Въ этомъ послѣднемъ случаѣ всѣ 3 круга: $x_1x=k$, $s_1=l^2+k+\sqrt{(l^2+k)^2-1}=e_1$ и $s_2=l^2+k-\sqrt{(l^2+k)^2-1}=e_3$ имѣютъ одну общую радикальную ось: $p=-\dfrac{1}{2l}\cdot$*

Такъ какъ на основаніи равенствъ (8) ур-ія окружностей $s=e_\alpha$ будутъ (если $3l_1=2l^2+k$) вида:

$$\left[l^2+k\pm\sqrt{(l^2+k)^2-1}\right]\left[x_1x_2+l^2\mp\sqrt{(l^2+k)^2-1}\right]+l(x_1+x_2)=0,$$

гдѣ должно брать одновременно или верхніе или нижніе знаки, то, полагая въ нихъ $x_1x_2=k$, получимъ $1+l(x_1+x_2)=0$; откуда $p=-\frac{1}{2l}$.

Подставляя это значеніе p въ ур-іе $x_1x_2=k$, найдемъ

$$q=\pm\frac{\sqrt{4kl^2-1}}{2l},$$

что и доказываетъ требуемое.

Замѣчаніе III. Окружностей $s=e_\alpha$ разсматриваемаго типа нѣтъ только въ случаѣ исключительнаго движенія 2-го рода ($l^2+k<1$); въ случаѣ (2a) будетъ всегда одна подобная окружность: $s_2=e_3$ при условіи $l^2>k$, и $s_1=e_1$ при условіи $l^2<k$ (См. § 3 главы II ст. 1), но она не будетъ пересѣкаться съ кругомъ $x_1x_2=k$, какъ и въ переходномъ случаѣ $l^2+k=1$.

Для переходнаго случая $1=4kl^2$ точка пересѣченія ея съ кругомъ $x_1x_2=k$ обращается въ точку касанія и будетъ дѣйствит., совпадая съ точкой, отмѣченной въ послѣдующей теоремѣ.

Теорема XIII. *Хорда, соединяющая точки пересѣченія круга $x_1x_2=k$ и окружности (20a) s_1 (или s_2) $=e_4=2l^2$, проходитъ черезъ центръ эллипса (21a) (см. § 3 гл. II ст. 1).*

Пересѣченіе всегда дѣйствительно, если дѣйствительна окружность (20a), т.-е. если $1\geq 4kl^2$ (случай существованія особо-замѣчательныхъ движеній).

Такъ какъ для разсматриваемыхъ случаевъ ур-іе окружности s_1 (или s_2)$=2l^2$ будетъ (см. тамъ же)

$$(20a)\quad (p^2+q^2)l+p+kl=0,$$

то общая координата p точекъ пересѣченія будетъ:

$$p=-2kl,$$

а абсцисса

$$q=\pm\sqrt{k(1-4kl^2)},$$

что и доказываетъ теорему.

Замѣчаніе IV. Отмѣченныхъ здѣсь точекъ пересѣченія не будетъ, слѣдовательно, существовать только въ случаѣ (2*b*), когда за то существуютъ точки, отмѣченныя въ теоремѣ XII.

Такимъ образомъ пересѣченія одного рода исключаютъ наличность другихъ и обратно, кромѣ переходнаго случая $1=4kl^2$.

Теорема XIII′. *Круги* $x_1x_2=k$ *и* (20*a*) *пересѣкаются ортогонально.*

Это слѣдуетъ изъ того, что координата p центра круга (20*a*) равна $-\frac{1}{2l}$, $q=0$, а радіусъ ρ опредѣляется соотношеніемъ:

$$\rho^2=\left(\frac{1}{2l}\right)^2-k,$$

откуда:

$$\rho^2+k=\left(\frac{1}{2l}\right)^2.$$

Слѣдовательно, треугольникъ, имѣющій вершинами центры обоихъ круговъ и одну изъ точекъ ихъ пересѣченія, будетъ прямоугольнымъ.

Замѣчаніе IV′. Такъ какъ здѣсь $\left(\frac{1}{2l}\right)^2>k$, то центръ круга (20*a*) лежитъ внѣ окружности $x_1x_2=k$. Для переходнаго къ 3-му классу случая $1=4kl^2$ центръ круга (20*a*), который тогда весь приводится къ одной своей центральной точкѣ, лежитъ на окружности $x_1x_2=k$ въ одной изъ точекъ ея пересѣченія съ осью p и служитъ одновременно центромъ эллипса (21a).

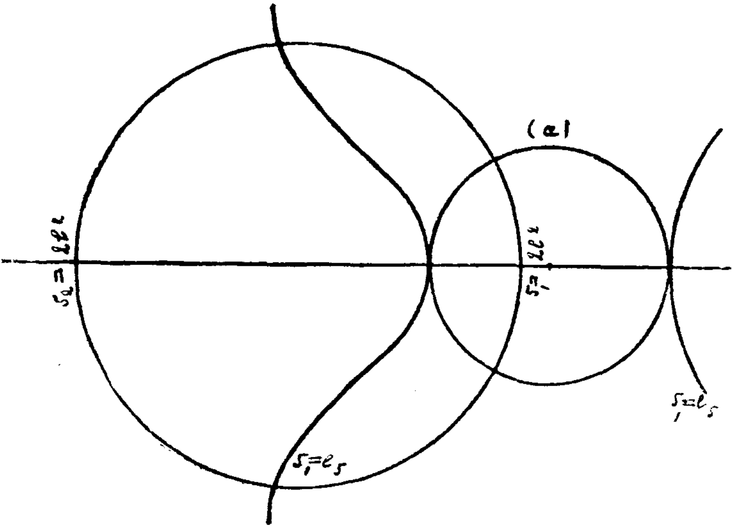
§ 2a. Изъ доказанныхъ теоремъ вытекаютъ слѣдующіе единственно возможные для движеній 2-й группы 2-го класса виды расположенія круга 1) $x_1x_2=k$ и элементовъ сѣтей кривыхъ $s=\text{const}$.

1) Для исключительныхъ движеній 2-го рода кругъ $x_1x_2=k$,

---

1) На всѣхъ чертежахъ этого § кругъ $x_1x_2=k$ обозначается буквой (*a*) съ индексами 1 или 2, если о его расположеніи можно сдѣлать два допущенія.

такъ сказать, закупориваетъ собою наиболѣе узкую горловую часть овала[1]) $s_1=e_5$. См. фигуру 3.



Фигура 3.

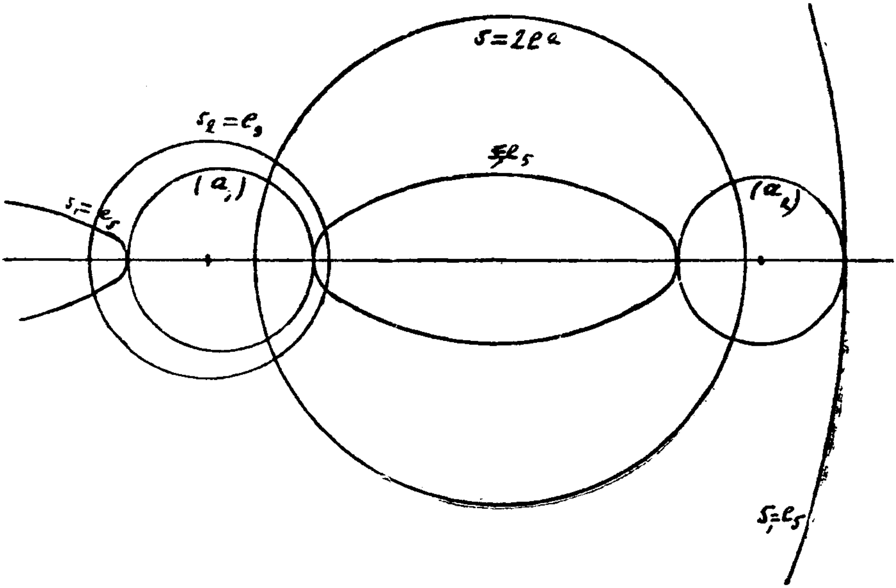
2) Для асимптотическихъ движенiй $(2a)$, при условiи $l^2>k$, кругъ $x_1x_2=k$ можетъ загораживать собою какой-либо одинъ изъ двухъ[2]) наиболѣе узкихъ промежутковъ между внѣшнимъ и внутреннимъ овалами $s_1=e_5$. Какой именно—это зависитъ отъ соблюденiя тѣхъ или другихъ неравенствъ между постоянными k и l. См. фигуру 4.

2') Для случая же $(2a)$, при условiи $l^2<k$, кругъ $x_1x_2=k$

---

[1]) Этотъ овалъ на черт. 3 изображенъ лишь отчасти. Точно также на всѣхъ слѣдующихъ чертежахъ внѣшнiй овалъ изображается не сполна и въ схематическомъ видѣ. Очертанiя внутренняго овала тоже всюду лишь приблизительныя.

[2]) Для переходнаго случая $l^2+k=1$ кругъ $s_2=e_3$ стягивается въ одну точку, такъ что кругъ $x_1x_2=k$ будетъ непремѣнно занимать положенiе (a_2).



Фигура 4.

или[1]) охватываетъ вплотную внутренній или загораживаетъ собою горловую часть внѣшняго овала. См. фигуру 5.

3) Для случая (2b) не асимптотическаго (колебательнаго) движенія кругъ $x_1x_2=k$, всегда охватывая собою внутренній овалъ $s_1=e_5$, прикасается или съ одной или съ другой стороны къ внѣшнему овалу. См. фигуру 6.

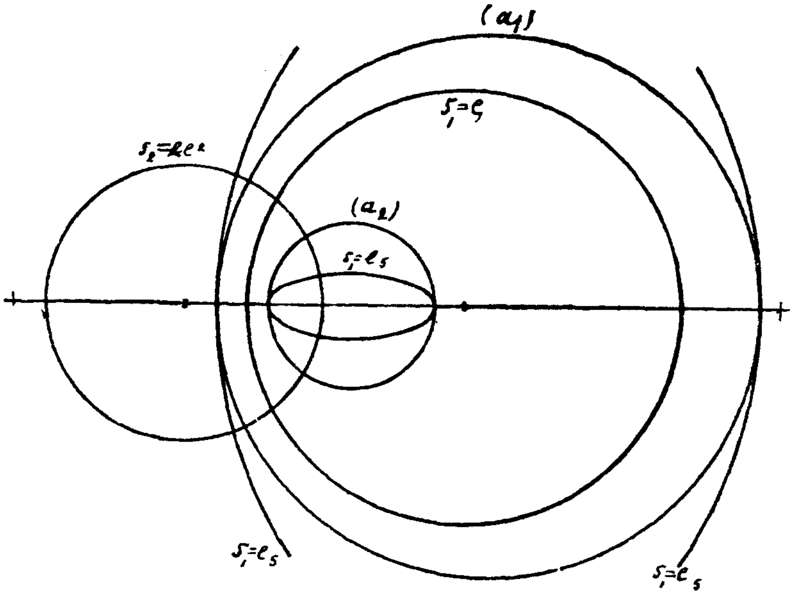
§ 3. Теперь я перейду къ выводу теоремъ о свойствахъ траэкторій точки Ω_1 относительно круга $x_1x_2=k$.

Теорема XIV. *Во всѣхъ случаяхъ движеній 2-ой группы 2-го класса, кромѣ нѣкоторыхъ переходныхъ формъ (см. замѣчаніе V), кругъ* $x_1x_2=k$ *расположенъ такъ, что траэкторія*[2]) *точки* Ω_1

---

[1]) Для случая $l^2+k=1$ кругъ $s_1=e_1$ стягивается въ одну точку, такъ что для круга $x_1x_2=k$ останется только положеніе (a_1).

[2]) Здѣсь необходимо имѣть въ виду, что подъ именемъ траэкторіи подразумѣвается вся совокупность положеній движущейся точки, т.-е. каждая вѣтвь входитъ въ составъ траэкторіи столько разъ, сколько разъ она описана при движеніи.



Фигура 5.

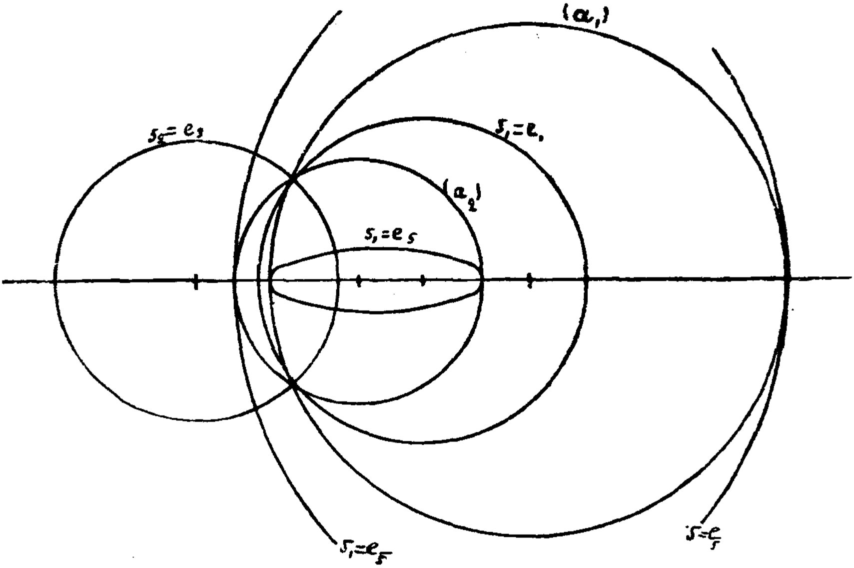
всегда должна и при томъ безконечное число разъ пересѣкать его какъ при особо-замѣчательныхъ, такъ и при обыкновенныхъ простѣйшихъ движеніяхъ.

Теорема эта прямо слѣдуетъ изъ разсмотрѣній §§ 1 и 2.

Замѣчаніе V. Въ переходныхъ къ 3-му классу случаяхъ, асимптотическихъ къ перманентнымъ вращеніямъ, т.-е. когда $l^2+k=1$, теорема XIV' не имѣетъ мѣста, такъ какъ тутъ подобное пересѣченіе, и то только конечное число разъ, возможно лишь для нѣкоторыхъ стадій движенія.

Для переходныхъ случаевъ вида $1=4kl^2$ особо-замѣчательныя движенія, которыя тутъ суть исключит. 1-го рода, тоже представляютъ исключеніе изъ теоремы по отношенію къ безконечности числа пересѣченій.

Замѣчаніе V'. Должно, впрочемъ, замѣтить, что вообще для особо-замѣчательныхъ движеній, а также для всякихъ строго-періодическихъ формъ это пересѣченіе, даже если оно совер-



Фигура 6.

шается безконечное число разъ, имѣетъ мѣсто только въ нѣкоторомъ конечномъ числѣ точекъ.

Теорема XV. *Для всѣхъ движенiй 2-ой группы 2-го класса, кромѣ особо-замѣчательныхъ, между каждыми двумя такими пересѣченьями траэкторiи* Ω_1 *съ кругомъ* $x_1x_2=k$*, которыя оба или соотвѣтствуютъ вертикальному положенiю оси* (r) *или нѣтъ, должны имѣть мѣсто* m_1 *пересѣченiй той же траэкторiи съ осью* p *и* m_2 *касанiй съ кривой* $s_1=e_5$*, при чемъ сумма* m_1+m_2 *есть число четное.*

Теорема XV′. *Справедлива также и обратная теорема.*

Такъ какъ изъ ур-iй (10′) слѣдуетъ, что

$$\xi_1=\frac{(x_1-x_2)^2\left[\sqrt{(s_1-e_4)(s_2-e_5)}+\sqrt{(s_1-e_5)(s_2-e_4)}\right]^2}{4R(x_2)},$$

$$\xi_2=\frac{(x_1-x_2)^2\left[\sqrt{(s_1-e_4)(s_2-e_5)}-\sqrt{(s_1-e_5)(s_2-e_4)}\right]^2}{4R(x_1)},$$

откуда послѣ легкаго преобразованія:

$$\xi_1 = \frac{(x_1 - x_2)^2 \left\{ \left[\sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_4)} + \sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_5)} \right]^2 - 4k^2 \right\}}{4R(x_2)},$$

$$\xi_2 = \frac{(x_1 - x_2)^2 \left\{ \left[\sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_4)} - \sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_5)} \right]^2 - 4k^2 \right\}}{4R(x_1)}, \tag{43}$$

гдѣ первый изъ радикаловъ мнимъ, а второй дѣйствителенъ въ силу неравенствъ (13).

На основаніи равенствъ (8) всегда будемъ имѣть для разсматриваемыхъ движеній:

$$\varepsilon\sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_4)} = 2l\frac{x_1 x_2 + k}{x_1 - x_2} + \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}, \tag{43'}$$

такъ какъ здѣсь $e_4 = 2l^2 = e_\alpha$, гдѣ e_α одинъ изъ корней ур-ія $\varphi(s) = 0$, и $3l_1 = 2l^2 + k$. Множитель ε можетъ имѣть постоянное значеніе $+$ или -1, которое сейчасъ намъ нѣтъ надобности опредѣлять точнѣе.

Что касается радикала $\sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_5)}$, то на основаніи соотношенія (42) очевидно, что въ моментъ, когда $x_1 x_2 = k$, абсолютная его величина равна 1. разъ при этомъ $q \neq 0$.

Также нетрудно установить, что знакъ этого послѣдняго радикала не остается постояннымъ, но мѣняется 1) въ моменты достиженія перемѣнной s_1 значенья e_5, т.-е. когда траэкторія Ω_1 прикасается къ одному изъ оваловъ $s_1 = e_5$, и 2) въ моменты пересѣченія той же траэкторіей оси p, т.-е. когда $s_2 = -\infty (q = 0)$.

Дѣйствительно, перемѣна знака выраженія $\sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_5)}$ возможна только въ указанные моменты, когда она и происходитъ, ибо послѣ достиженья перемѣнной s_1 ея крайняго значенія e_5 изъ ур-ій (2) слѣдуетъ необходимость перемѣны знака $\sqrt{s_1 - e_5}$ при неизмѣнности знака $\sqrt{s_2 - e_5}$, а по достиженіи перемѣнной s_2 значенія $-\infty$ необходимость перемѣны знака $\sqrt{s_2 - e_5}$ при неизмѣнности знака $\sqrt{s_1 - e_5}$, Но такъ какъ въ силу принятыхъ при выводѣ ур-ій (2) условій

$$\sqrt{(s_1-e_5)(s_2-e_5)}=\sqrt{s_1-e_5}\ \sqrt{s_2-e_5},$$

то наше утвержденіе о знакѣ радикаловъ можно считать доказаннымъ.

Далѣе непосредственнымъ вычисленіемъ величинъ γ и γ' изъ равенствъ (43) ($\xi_{1,2}=(p\pm iq)^2+\gamma\pm i\gamma'$) легко обнаружить, что для не особо замѣчательныхъ движеній при любомъ значеніи множителя $\varepsilon(\pm1)$ знакъ 2-го радикала всегда можно подобрать такъ, что въ моментъ, когда $x_1x_2=k$, обѣ эти величины будутъ равны 0. *При* $q=0$, $p=\pm\sqrt{k}$ *необход.* $\gamma=\gamma'=0$.

Если теперь принять въ расчетъ вышеустановленный законъ измѣненія знака радикала $\sqrt{(s_1-e_5)(s_2-e_5)}$, то теорему можно считать доказанной (касаніе экв. 2 пересѣченьямъ).

Замѣчаніе VI. Для особо-замѣчательныхъ движеній, когда постоянно $\sqrt{(s_1-e_4)(s_2-e_4)}=0$, всякое пересѣченіе траэкторіи Ω_1 съ кругомъ $x_1x_2=k$ соотвѣтствуетъ вертикальности полярной оси (r), ибо въ этомъ случаѣ вычисляемыя изъ формулъ (43) значенія γ и γ' при всякомъ знакѣ 2-го радикала обращаются въ 0, когда $x_1x_2=k$.

Т. о. для особо-замѣчат. движеній періодическаго характера въ исключительномъ случаѣ 2-го рода на каждый полный оборотъ точки Ω_1 приходится по 4, а во всѣхъ остальныхъ случаяхъ по два вертикальныхъ положенія оси (r).

На основаніи теоріи особо-замѣчательныхъ движеній (см. § 3 гл. II ст. 1) слѣдуетъ, что для исключит. случаевъ 2 вертик. положенія оси (r) будутъ одного направленія (вверхъ), а 2 другаго (внизъ) съ промежуточной горизонтальностью, для случая (2a) при $l^2>k$ одноименныя вертик. положенія безъ горизонтальнаго и для случая (2a) при $l^2<k$ разноименныя вертик. съ промежут. горизонтальнымъ ($r=\gamma''=0$).

При $k=0$ (переход. къ 1-ому классу) число вертик. положеній оси (r) вдвое менѣе, ибо они тутъ попарно сливаются.

§ 4. Для выясненія порядка смѣны во времени вертикальныхъ положеній полярной оси гироскопа, равно какъ для посильнаго раскрытія и нѣкоторыхъ другихъ законовъ изучаемаго явленія я постараюсь на основаніи общихъ формулъ С. В. Ковалевской и F. Kötter'а и приведеннаго въ главѣ I настоящей статьи рѣшенія задачи обращенія для частнаго вида гиперэллиптическихъ функцій составить выраженія въ функціи времени для всѣхъ [1]) величинъ, характеризующихъ разсматриваемыя простѣйшія движенія.

Чтобы сдѣлать свое изложеніе объ этомъ болѣе удобопонятнымъ, я сначала напишу шесть заимствованныхъ изъ статьи F. Kötter'а формулъ, дающихъ выраженія для величинъ p, q, r (проэкцій угловой скорости Ω на оси инерціи) и γ, γ', γ'' (cos угловъ этихъ осей съ направленіемъ внизъ вертикали) черезъ вспомогательныя перемѣнныя С. В. Ковалевской s_1 и s_2, и вкратцѣ напомню способъ ихъ вывода.

Эти формулы будутъ пригодны во всѣхъ случаяхъ, кромѣ т. н. мною случаевъ 3-го класса, когда онѣ дѣлаются неопредѣленными. Первыя двѣ изъ нихъ легко получаются изъ ур-ій (8), если ввести всегда осуществимое условіе $\sqrt{2e_1}\,\sqrt{e_2}\,\sqrt{e_3}=2l$ (44).

Тогда будемъ имѣть:

$$p=-\frac{\sum\frac{\sqrt{e_\beta}\,\sqrt{e_\gamma}}{\varphi'(e_\alpha)}P_\alpha}{\sqrt{2}\sum\frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}P_\alpha},\qquad \left(\begin{matrix}\alpha,\beta,\gamma=1,2,3\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma\end{matrix}\right)\qquad(45)$$

$$q=\frac{i}{\sqrt{2}\sum\frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}P_\alpha},$$

гдѣ

$$P_\alpha=\sqrt{(s_1-e_\alpha)(s_2-e_\alpha)}=\sqrt{s_1-e_\alpha}\,\sqrt{s_2-e_\alpha},\quad \varphi(e_\alpha)=0,\ \text{но}\ \varphi'(e_\alpha)\neq0.$$

Если въ ур-іи (7) сдѣлать $z=s$, то на основаніи равенствъ

---

[1]) Кромѣ прецессіи, свойства которой въ настоящей работѣ совсѣмъ не затрогиваются.

(6) въ той ихъ формѣ[1]), которая отмѣчена мною въ § 4 Введенія ст. 1, безъ затрудненія получимъ:

$$\frac{\sqrt{R(x_1)}-\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\varphi(s_1)}}\left[2s_1(x_1x_2+3l_1-s_1)+2l(x_1+x_2)\right],$$

$$(45')$$

$$\frac{\sqrt{B(x_1)}+\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2}=-\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\varphi(s_2)}}\left[2s_2(x_1x_2+3l_1-s_2)+2l(x_1+x_2)\right].$$

Отсюда нетрудно вывести выраженія для $\frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1-x_2}$ и $\frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2}$ въ функціи s_1 и s_2, предварительно выразивъ съ помощью ур-ій (8) вторыя части равенствъ (45′) черезъ эти перемѣнныя.

Точно также путемъ почленнаго перемноженія тѣхъ же 2-хъ равенствъ и сравненія первой и второй части вновь полученнаго легко установить, что радикалы $\sqrt{\varphi(s)}$ и P_α связаны при наличности условія (44) слѣдующимъ тождественнымъ соотношеніемъ:

$$\sqrt{\varphi(s_1)}\cdot\sqrt{\varphi(s_2)}=P_1\,.\,P_2\,.\,P_3\,.\;{}^{2}). \qquad (45'')$$

Далѣе при помощи послѣднихъ двухъ изъ формулъ (12) получимъ

$$r=\sqrt{2}\frac{\sum\frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}P_{\beta\gamma}}{\sum\frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}P_\alpha};$$

$$(46)$$

$$\gamma''=\frac{\sum\frac{\sqrt{e_\beta}\sqrt{e_\gamma}}{\varphi'(e_\alpha)}P_{\beta\gamma}}{\sum\frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}P_\alpha},$$

---

[1]) См. статью F. Kötter'a. стр. 216, 17.

Также мое сочиненіе „Задача о движеніи тяжелаго тв. тѣла около неподвижной точки". Стр. 84.

[2]) Отсюда слѣдуетъ, что всегда можно полагать:

$$\sqrt{\varphi(s)}=\sqrt{s-e_1}\sqrt{s-e_2}\sqrt{s-e_3}.$$

Это вполнѣ опредѣлитъ смыслъ выраженія $\sqrt{R(x)}$ черезъ радикалы $\sqrt{s-e_\alpha}$.

гдѣ

$$P_{\beta\gamma}=\frac{P_\beta P_\gamma}{s_1-s_2}\left\{\frac{S_1}{(s_1-e_\beta)(s_1-e_\gamma)}-\frac{S_2}{(s_2-e_\beta)(s_2-e_\gamma)}\right\}.$$

$$S=\sqrt{s-e_1}\sqrt{s-e_2}\sqrt{s-e_3}\sqrt{s-e_4}\sqrt{s-e_5}=\sqrt{\varphi(s)}\sqrt{(s-e_4)(s-e_5)},$$ [1]

$$\alpha,\beta,\gamma=1,2,3\quad \alpha\neq\beta\neq\gamma,\quad e_4=3l_1-k,\quad e_5=3l_1+k.$$

Ур-ія (10′) послѣ нѣкоторыхъ упрощеній на основаніи тождества[2]

$$2k\left(\sum\frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}P_\alpha\right)^2=\left(\sum\frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}P_{\alpha4}\right)^2-\left(\sum\frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}P_{\alpha5}\right)^2,$$

гдѣ $P_{\alpha4}$ и $P_{\alpha5}$ суть обозначенія эквивалентныя съ $P_{\beta\gamma}$, если индексъ β замѣнить черезъ α, а γ черезъ 4 или 5, дадутъ:

$$\gamma\pm i\gamma'=\frac{\sum\frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}(e_\alpha-e_4)P_{\alpha4}\mp\sum\frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}(e_\alpha-e_5)P_{\alpha5}}{\sum\frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}P_{\alpha4}\mp\sum\frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}P_{\alpha5}}\,. \qquad (47)$$

§ 4a. Въ виду того, что во всей 2-ой главѣ мы занимаемся только опредѣленнымъ частнымъ случаемъ движенія гироскопа С. В. Ковалевской, соотвѣтствующимъ[3] условію $e_4=3l_1-k=2l^2$ или, что то же, $\varphi(e_4)=0$ (2-ая группа 2-го класса), то мы всюду здѣсь можемъ брать диф. ур-ія для опредѣленія перемѣнныхъ s въ слѣдующей простой[4] формѣ:

$$\frac{ds_1}{\sqrt{(\Delta-s_1)[s_1(s_1-\Delta)+1]}}+\frac{ds_2}{\sqrt{(\Delta-s_2)[s_2(s_2-\Delta)+1]}}=-\sqrt{2}.dt.$$

(48)

$$\frac{ds_1}{(s_1-2l^2)\sqrt{(\Delta-s_1)[s_1(s_1-\Delta)+1]}}+\frac{ds_2}{(s_2-2l^2)\sqrt{(\Delta-s_2)[s_2(s_2-\Delta)+1]}}=0,$$

---

[1] $\sqrt{(s-e_4)(s-e_5)}=\sqrt{s-e_4}\sqrt{s-e_5}$ означаетъ тотъ радикалъ, который входитъ въ формулу (12) и, слѣдовательно, въ (43).

[2] Между 12 выраженіями P существуетъ 10 соотношеній, получающихся путемъ исключенія s и аналогичныхъ упомянутымъ въ I-ой главѣ соотношеніямъ 2-ой степени между функціями Z.

[3] См. § 2 гл. II. (1).

[4] См. § 1 гл. III (1).

гдѣ

$$\Delta=2(k+l^2),\ e_\gamma=e_4=2l^2,\ e_\alpha e_\beta=1,\ e_\alpha+e_\beta=\Delta=e_5,$$

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma=1,2,3,\ \alpha\neq\beta\neq\gamma),$$

а радикалы, входящіе въ эти ур-ія, связаны съ радикалами предыдущаго параграфа такими тождественными соотношеніями:

$$\sqrt{\Delta-s}=i\sqrt{s-e_5},\ s-2l^2=\sqrt{s--e_4}\sqrt{s-e_\gamma},\ \sqrt{s-e_4}=\sqrt{s-e_\gamma},\text{[1]}$$

$$iS=(s-2l^2)\sqrt{(\Delta-s)[s(s-\Delta)+1]}.$$

Такъ какъ, положивъ въ системѣ ур-ій (30):

$$g_2=4\left[\frac{1}{3}\Delta^2-1\right],\ g_3=\frac{4}{3}\Delta\left[1-\frac{2}{9}\Delta^2\right],\ \bar{e}_4=\frac{2}{3}\Delta-2l^2,$$

$$\bar{e}_\lambda+e_a=\frac{2}{3}\Delta,\ s-e_a=-(z-\bar{e}_\lambda),\ \sqrt{s-e_a}=i\sqrt{z-\bar{e}_\lambda},$$

$$d\tau_1=-\frac{dt}{\sqrt{2}},\ d\tau_2=0,$$

гдѣ индексъ λ можетъ имѣть значеніе: 1,2,3,4, а индексъ a указываетъ на соотвѣтствующій корень многочлена S^2, мы придемъ къ ур-іямъ (48), то всѣ найденныя въ главѣ I выраженія для функцій Z могутъ въ данномъ случаѣ служить намъ для вычисленія въ функціи времени P предыдущаго §, а именно мы будемъ имѣть:

$$u=\frac{t_0-t}{\sqrt{2}},\ w=-\frac{t}{\sqrt{2}}\zeta(v)+w_0, \tag{49}$$

если обозначить черезъ t_0 и w_0 постоянныя интеграціи,

---

[1] Послѣднее равенство есть слѣдствіе предшествующаго, въ силу коего два дѣйствит. радикала равной абсолют. величины $\sqrt{s_1-e_4}$ и $\sqrt{s_1-e_\gamma}$ (или 2 мним. $\sqrt{s_2-e_4}$ и $\sqrt{s_2-e_\gamma}$), образуя положит. (отрицат. s_2-2l^2) произведеніе s_1-2l^2, не могутъ отличаться знаками.

и $$P_a = -Z_\lambda, \quad P_{a,b} = -iZ_{\lambda,\mu},$$

гдѣ индексы b и μ играютъ роль, аналогичную роли a и λ.

Для большей ясности я напишу здѣсь равенства

$$\bar{e}_\lambda + e_a = \frac{2}{3}\Delta,$$

устанавливающія соотвѣтствіе между индексами a и λ (или b и μ), въ раскрытой формѣ.

1) Если $l^2+k<1$, т.-е. *для исключительныхъ движеній 2-го рода*, будемъ имѣть:

$$e_1+\bar{e}_4 = e_2+\bar{e}_1 = e_3+\bar{e}_3 = e_4+\bar{e}_4 = e_5+\bar{e}_2.$$

2a) Если $l^2+k>1$ и $1>4kl^2$, т.-е. *для асимптотическаго случая*, получимъ при $l^2>k$

$$e_1+\bar{e}_4 = e_2+\bar{e}_2 = e_3+\bar{e}_1 = e_4+\bar{e}_4 = e_5+\bar{e}_3,$$

а при $l^2<k$

$e_1+\bar{e}_2 = e_2+\bar{e}_1 = e_3+\bar{e}_4 =$ и далѣе слѣдуютъ суммы предыдущаго ряда.

2b) Если $l^2+k>1$ и $1<4kl^2$ (*не асимптотическое движеніе*), $e_1+\bar{e}_2 = e_2+\bar{e}_4 = e_3+\bar{e}_1 =$ и далѣе по предыдущему.

Умѣя теперь соотвѣтствующіе P выражать въ зависимости отъ времени, мы безъ труда найдемъ по формуламъ (45), (46) и (47) подобныя *выраженія и для* p, q, r, γ, γ', γ'',[1] *которыя, какъ и должно было ожидать, оказываются однозначными и мероморфными функціями перемѣннаго* t, *вообще говоря, не періодическаго характера*.

Для приданія имъ полной законченности останется только опредѣлить значенья произвольныхъ постоянныхъ t_0 и w_0 въ

---

[1] Эти выраженья будутъ имѣть мѣсто только для непереходныхъ къ 3-му классу случаевъ, однако всѣ выводы, получаемые отсюда путемъ предѣльнаго разсмотрѣнія, имѣютъ полную силу и для переходныхъ случаевъ.

зависимости отъ начальныхъ данныхъ и точный смыслъ ¹) 3-хъ входящихъ въ наши формулы постоянныхъ радикаловъ:

$$\sqrt{e_1},\ \sqrt{e_2},\ \sqrt{e_3},$$

удовлетворяющихъ условію (44).

Я это сдѣлаю сейчасъ для всѣхъ непереходныхъ движеній изучаемой группы, кромѣ особо-замѣчательныхъ, какъ уже достаточно изслѣдованныхъ. Для этихъ послѣднихъ отмѣчу только, что они соотвѣтствуютъ значенію $w_0=\pm\infty$.

1) *Въ исключительныхъ случаяхъ 2-го рода* согласно результатамъ § 1 гл. III ст. 1 будемъ имѣть, если за начальный моментъ выберемъ моментъ прохожденія точки Ω_1 черезъ одну изъ исключительныхъ точекъ 2-го рода:

$$t_0=0 \text{ и } -\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\vartheta_0}\right)^2=e^{2w_0}, \text{ откуда } e^{w_0}=\pm\frac{i}{\operatorname{tg}\vartheta_0}\cdot$$

Такъ какъ въ силу свойствъ функцій σ выраженія

$$P_2=-Z_1 \text{ и } P_3=-Z_3$$

будутъ здѣсь комплексны и сопряженны, то произведеніе ихъ $P_2\ P_3$ будетъ величиной положительной и потому на основаніи двухъ послѣднихъ соотношеній (8) произведеніе корней $\sqrt{e_2}$ и $\sqrt{e_3}$ должно удовлетворять слѣдующему условію:

$$\sqrt{e_2}\ \sqrt{e_3}=-1. \tag{50}$$

Изъ условія (44) получимъ затѣмъ:

$$\sqrt{e_1}=-l\sqrt{2},\ ^{2)} \tag{50'}$$

что позволитъ точно опредѣлить знакъ произвольной посто-

---

[1] Опредѣленный для каждаго случая движенья выборъ знаковъ у этихъ радикаловъ имѣетъ цѣлью согласованье тѣхъ постоянныхъ правилъ, которыя опредѣляютъ всѣ величины и знаки входящихъ въ формулы эллипт. ф. времени, съ возможнымъ разнообразіемъ начальныхъ условій движенья.

[2] Для этого случая множитель ε въ формулѣ (43′) равенъ, очевидно, —1.

янной e^{w_0} съ помощью перваго изъ равенствъ (8), если взять его для момента непосредственно слѣдующаго за начальнымъ.

Что касается окончательнаго опредѣленія смысла радикаловъ $\sqrt{e_2}$ и $\sqrt{e_3}$, то это легко можно произвести съ помощью 2-го или 3-го изъ соотношеній (8).

Аргументъ v будетъ здѣсь нѣкоторой вполнѣ опредѣленной дѣйствительной величиной, заключенной между 0 и ω_2 (см. § 1 гл. III ст. 1).

Періоды $2\omega_1$ и $2\omega_3$ комплексны, дѣйствителенъ лишь періодъ

$$2\omega_2=\int\limits_{-\infty}^{\Delta}\frac{ds}{\sqrt{(\Delta-s)[s(s-\Delta)+1]}}\,.$$

$2a$) Въ случаѣ ($2a$), если за начальный моментъ выбрать тотъ, когда $q=0$ ($s_2=-\infty$), то постоянная t_0 будетъ равна:

$$\frac{t_0}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{s_{10}}\frac{ds}{\sqrt{(\Delta-s)[s(s-\Delta)+1]}}=\int\limits_{z_{10}}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{4z_3-g_2z-g_3}}\,,$$

гдѣ $s_{10}=\frac{2}{3}\Delta-z_{10}$ есть начальное значеніе перемѣнной s_1, всегда удовлетворяющее неравенству $2l^2<s_{10}<\Delta(\bar{e}_3<z_{10}<\bar{e}_2)$, а знакъ радикаловъ явно не проставленъ.

Иначе

$$\frac{t_0}{\sqrt{2}}=\int\limits_{\bar{e}_3}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}-\int\limits_{\bar{e}_3}^{z_{10}}\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}=\pm(\omega_3-\tau_0),$$

гдѣ

$$\tau_0=+\int\limits_{\bar{e}_3}^{z_{10}}\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}\,,$$

т.-е. въ данномъ случаѣ всегда дѣйствительная и положительная величина.

Въ формулѣ $\left(\frac{t_0}{\sqrt{2}}=\right)$ должно брать какой-либо одинъ знакъ сообразно съ начальными условіями (начальнымъ знакомъ радикала $i\ S$) задачи.

Изъ условія $q=0$ при $t=0$ будемъ имѣть:

$$e^{x_0}\sigma[\pm(\omega_3-\tau_0)-v]+e^{-x_0}\sigma[\pm(\omega_3-\tau_0)+v]=0,$$

откуда

$$e^{x_0}=\left\{\frac{\sigma[\pm(\omega_3-\tau_0)+v]}{\sigma[\pm(\omega_3-\tau_0)-v]}\right\}^{\frac{1}{2}}i=\left\{\frac{\sigma_3(v\mp\tau_0)}{\sigma_3(v\pm\tau_0)}\right\}^{\frac{1}{2}}ie^{\pm\eta_3 v}.$$

Такъ какъ (для момента $t=0$) результаты почленнаго дѣленія 2-го и 3-го (въ случаѣ $l^2>k$) или 1-го и 2-го (при $k>l^2$) изъ равенствъ (8) будутъ вполнѣ опредѣленны, кромѣ факторовъ $\sqrt{e_2}$ и $\sqrt{e_3}$ въ 1-омъ и $\sqrt{e_1},\sqrt{e_2}$ въ 2-омъ случаѣ, то сообразно съ характеромъ начальныхъ данныхъ, точнѣе сказать сообразно съ тѣмъ, внѣ или внутри круга $s_2=e_3$ (1-ый случай) или $s_1=e_1$ (2-ой) находится начальное положеніе точки Ω_1, будемъ имѣть для произведенія этихъ факторовъ значеніе $+$ или -1.

Изъ условія (44) тогда будетъ соотвѣтственно слѣдовать такое опредѣленіе радикала $\sqrt{2l^2}$ изъ 3-го корня ур-ія $\varphi(s)=0$:

$$\sqrt{2l^2}=+l\sqrt{2} \text{ или } -l\sqrt{2}.$$

Знакъ постоянной e^{x_0} теперь будетъ вполнѣ опредѣленъ изъ соотвѣтствующаго корню $e_\alpha=2l^2$ равенства (8), если разсмотрѣть его для момента непосредственно слѣдующаго за начальнымъ.

Аргументъ v при $l^2>k$ есть комплексная, а при $k>l^2$ нѣкоторая дѣйствительная величина, которую можно считать заключающейся въ предѣлахъ O и ω_1.

Періоды $2\omega_2$ и $2\omega_3$ комплексны, а

$$2\omega_1=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}[\Delta-\sqrt{\Delta^2-4}]}\frac{ds}{\sqrt{(\Delta-s)[s(s-\Delta)+1]}}.$$

2*b*) Для случая не асимптотическаго движенья, определяя t_0 и w_0 также изъ условія:

$$t=0,\ q=0(s_2=-\infty),\ s_1=s_{10},$$

гдѣ

$$e_1<s_{10}<\Delta,$$

получимъ

$$\frac{t_0}{\sqrt{2}}=\pm(\omega_3-\tau_0),\ \ \tau_0=+\int\limits_{\bar{e}_3}^{z_{10}}\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}},$$

$$z_{10}=\frac{2}{3}\Delta-s_{10},\ (\bar{e}_3<z_{10}<\bar{e}_2),$$

$$e^{w_0}=\left[\frac{\sigma_3(v\mp\tau_0)}{\sigma_3(v\pm\tau_0)}\right]^{\frac{1}{2}}i\,e^{\pm\eta_3 v},$$

гдѣ v комплексное количество, коего дѣйствительную часть можно считать равной ω_1.

Произведеніе факторовъ $\sqrt{e_1}\,.\sqrt{e_3}$ здѣсь тоже можетъ быть равно + или —1.

Точно также и $\sqrt{2l^2}$ въ силу условія (44) можетъ быть соотвѣтственно равнымъ $+l\sqrt{2}$ или $-l\sqrt{2}$.

Дѣйствителенъ періодъ $2\omega_1$, какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

§ 5. Чтобы утилизировать найденное рѣшенье прежде всего съ цѣлью раскрытья законовъ періодическаго характера, проявляющихся въ разсматриваемыхъ движеніяхъ гироскопа С. В. Ковалевской, я составлю путемъ исключенья количества e^w изъ формулъ предыдущаго § нѣсколько новыхъ соотношеній, которыя, очевидно, будутъ имѣть силу для всѣхъ движеній (и переходныхъ) данной группы, кромѣ асимптот. къ перманент. вращеньямъ.

Собственно говоря, кромѣ ур-ій 4 алгебраическихъ интеграловъ такимъ путемъ можно составить только одно независимое соотношеніе между величинами p, q, r, γ, γ', γ'', съ коэф., зависящими отъ u.

Соотношеніе это представляетъ интегралъ 1-го изъ ур-ій (48), получаемый на основаніи теоремы о сложеніи эллиптич. функцій. Однако съ помощью ур-ій 4-хъ алг. интеграловъ ему могутъ быть придаваемы довольно разнообразныя формы, въ которыхъ зависимость коэффиціентовъ отъ времени будетъ всегда періодическаго характера.

Остановимся сначала на той, которую оно получитъ, если въ немъ оставить только величины p и q.

Для вывода ея проще всего воспользоваться такимъ тождествомъ (39):

$$Z_{\alpha\beta}=Z_{\beta\alpha}=\frac{\sigma_\gamma(u)}{\sigma(u)}\,(\bar{e}_4-\bar{e}_\alpha)+Z_\alpha\frac{\sigma_\beta(u)}{\sigma(u)}=\frac{\sigma_\gamma(u)}{\sigma(u)}\,(\bar{e}_4-\bar{e}_\beta)+Z_\beta\frac{\sigma_\alpha(u)}{\sigma(u)}\cdot$$

Замѣняя Z черезъ P, будемъ имѣть:

$$\frac{\sigma_\nu(u)}{\sigma(u)}\,(\bar{e}_4-\bar{e}_\lambda)-P_a\frac{\sigma_\mu(u)}{\sigma(u)}=\frac{\sigma_\nu(u)}{\sigma(u)}\,(\bar{e}_4-\bar{e}_\mu)-$$
$$-P_b\,\frac{\sigma_\lambda(u)}{\sigma(u)},\ \begin{pmatrix}\lambda,\,\mu,\,\nu=1,\,2,\,3\\ \lambda\mp\mu\mp\nu\end{pmatrix}$$

гдѣ P_a и P_b могутъ быть въ свою очередь замѣнены ихъ выраженьями изъ ур-ій (8), если подъ e_a и e_b подразумѣвать корни ур-ія $\varphi(s)=0$, оставшіеся за выдѣленіемъ корня $2l^2$.

Послѣ нѣкоторыхъ сокращеній получимъ въ концѣ концевъ:

$$\left[(x_1x_2-e_b+3l_1)\sqrt{2e_b}+\frac{2l}{\sqrt{2e_b}}(x_1+x_2)\right]\frac{\sigma_\lambda(u)}{\sigma(u)}-\left[(x_1x_2-e_a+3l_1)\sqrt{2e_a}+\right.$$
$$\left.+\frac{2l}{\sqrt{2e_a}}(x_1+x_2)\right]\frac{\sigma_\mu(u)}{\sigma(u)}+(\bar{e}_\mu-\bar{e}_\lambda)(x_1-x_2)\frac{\sigma_\nu(u)}{\sigma(u)}=0. \tag{51}$$

Въ виду свойствъ функцій σ коэффиціенты этого ур-ія будутъ сохранять свои значенія неизмѣнными для моментовъ u, $u+4\omega_2$, $u+8\omega_2$ и т. д. въ исключительномъ случаѣ 2-го рода и для моментовъ u, $u+4\omega_1$, $u+8\omega_1$ и т. д. въ прочихъ случаяхъ 2-й группы 2-го класса.

Такимъ образомъ мы будемъ имѣть слѣдующую теорему:

Теорема XVI. *Для всѣхъ не асимптотическихъ къ перманентнымъ вращеньямъ движеній 2-й группы 2-го класса* ¹) *на экваторіальной плоскости гироскопа существуетъ семейство окружностей (51) такого свойства, что пересѣченіе траэкторіи* Ω_1 *съ каждымъ изъ представителей этого семейства непремѣнно* ²) *повторяется черезъ промежутокъ времени, равный двойному дѣйствительному періоду соотвѣтствующихъ движенію эллиптическихъ функцій, помноженному на* $\sqrt{2}$.

Тоорема XVII. *При исключительныхъ движеніяхъ 2-го рода точка* Ω_1 *въ моменты* $T=(2n+1)\omega_2\sqrt{2}$ ³) *находится на окружности* $x_1x_2=k$.

Такъ какъ въ этомъ случаѣ индексы въ ур-іи (51) имѣютъ слѣдующее значеніе: $a=2$, $\lambda=1$, $b=3$, $\mu=3$, $\nu=2$ (см. § 4a), а аргументъ u при $t=T$ равенъ $-(2n+1)\omega_2$, то для этихъ моментовъ мы получимъ:

$$(x_1x_2-k)\left[\sqrt{e_3}\sigma_1(\omega_2)-\sqrt{e_2}\sigma_3(\omega_2)\right]+l(x_1+x_2)\left[\frac{\sigma_1(\omega_2)}{\sqrt{e_3}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sigma_3(\omega_2)}{\sqrt{e_2}}\right]-\sqrt{e_2}\sigma_1(\omega_2)+\sqrt{e_3}\sigma_3(\omega_2)=0.$$

Теорія эллиптическихъ функцій Вейерштрасса ⁴) даетъ:

$$\sigma_1(\omega_2)=\sqrt{e_2-e_1}\sigma(\omega_2), \qquad \sigma_3(\omega_2)=\sqrt{e_2-e_3}\sigma(\omega_2),$$

$$\sqrt{e_2-e_1}=-i\sqrt{e_1-e_2}, \; \sqrt{e_2-e_3}=i\sqrt{e_3-e_2},$$

гдѣ

$$\sqrt{\theta_1-e_2} \text{ и } \sqrt{e_3-e_2}$$

---

¹) Такъ какъ ур-іе (51) и всѣ его видоизмѣненія сохраняютъ свою форму и для предѣльнаго случая, то всѣ теоремы настоящаго § имѣютъ силу для соотвѣт. переходныхъ движеній ($1=4kl^2$).

²) Такое повтореніе не исключаетъ, вообще говоря, возможности пересѣченья и въ нѣкоторые другіе моменты.

³) n означаетъ любое цѣлое число.

⁴) Halphen. loco citato. Стр. 191, 192.

суть здѣсь двѣ сопряженныя[1]) величины, что будемъ далѣе помѣчать знакомъ $\sqrt{\overline{\overline{\ }}}$.

На основаніи равенствъ § 4а будемъ имѣть:

$$\sqrt{\overline{\overline{e_1-e_2}}}=\sqrt{\overline{\overline{e_5-e_2}}}=\sqrt{\overline{\overline{e_3}}} \text{ и } \sqrt{\overline{\overline{e_3-e_2}}}=\sqrt{\overline{\overline{e_5-e_3}}}=\sqrt{\overline{\overline{e_2}}}.$$

Такъ какъ произведеніе $\sqrt{\overline{\overline{e_2}}}\ \sqrt{\overline{\overline{e_3}}}=1$, а произведенье $\sqrt{e_2}\,\sqrt{e_3}=-1$ по условію (50), то

$$\frac{\sigma_1(\omega_2)}{\sqrt{e_3}}-\frac{\sigma_3(\omega_2)}{\sqrt{e_2}}=\sqrt{e_2}\sigma_1(\omega_2)-\sqrt{e_3}\sigma_3(\omega_2)=0,$$

но

$$\sqrt{e_3}\sigma_1(\omega_2)-\sqrt{e_2}\sigma_3(\omega_2)\neq 0.$$

Слѣдовательно при $t=T$

$$x_1x_2=k,$$

что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Для исключительнаго случая 2-го рода кругъ $x_1x_2=k$ играетъ т. о. роль какъ бы двойной окружности въ семействѣ (51).

Онъ является здѣсь единственнымъ кругомъ (51), имѣющимъ свой центръ на оси p.

Теорема XVII′. *Для каждаго изъ остальныхъ*[2]) *не асимптотическихъ къ перманентнымъ вращеніямъ движеній 2-й группы 2-го класса въ системѣ круговъ (51) существуетъ только 2 круга съ центромъ на оси p, изъ коихъ одинъ есть кругъ $x_1x_2=k$.*

Такъ какъ для нахожденія центра круга (51) на оси p необходимо имѣть $\sigma_\nu(u)=0$, т.-е. для данныхъ случаевъ движеній $\sigma_3(u)=0$, то такіе круги будутъ соотвѣтствовать значеньямъ: $u=\omega_3+2m_1\omega_1+2m_2\omega_2$ (m—любыя цѣлыя числа). На основаніи свойствъ функцій σ для моментовъ $u=\pm\omega_3+4m\omega_1$

---

[1]) Сопряженными будутъ и другіе два корня: $\sqrt{\bar{e}_2-\bar{e}_1}$ и $\sqrt{e_2-\bar{e}_3}$. См. Halphen, стр. 268, формулы (58c) для случая отрицательнаго дискриминанта.

[2]) Т.-е. кромѣ исключит. 2-го рода.

получимъ такое ур-іе для соотвѣт. окружности (51) при условіи $\sqrt{e_\alpha}\sqrt{e_\beta}=1$:

$$x_1x_2=k.$$

Подобное же ур-іе получится для значеній $u=\pm\omega_3+(4m+2)\omega_1$ при условіи $\sqrt{e_\alpha}\sqrt{e_\beta}=-1$.

Для моментовъ $u=\pm\omega_3+4m\omega_1$ при условіи $\sqrt{e_\alpha}\sqrt{e_\beta}=-1$ будемъ имѣть окружность (51) вида:

$$(k-x_1x_2)(l^2+k)+l(x_1+x_2)+1=0. \qquad (51')$$ [1]

Тоже получится и для значеній $u=\pm\omega_3+(4m+2)\omega_1$ при условіи $\sqrt{e_\alpha}\sqrt{e_\beta}=1$.

Такъ какъ остальныя значенья аргумента u вида $\omega_3+2m_1\omega_1+2m_2\omega_2$ не могутъ получаться ни при какомъ дѣйствительномъ значеніи t (ср. равенство $u=\frac{t_0-t}{\sqrt{2}}$), тогда какъ, наоборотъ, значеньямъ $u=\pm\omega_3+4m\omega_1$ всегда соотвѣтствуютъ дѣйствительные моменты времени вида:

$$T=(4n\omega_1\mp\tau_0)\sqrt{2},$$

а значеньямъ $u=\pm\omega_3+(4m+2)\omega_1$ моменты времени

$$T=\left[(4n+2)\omega_1\mp\tau_0\right]\sqrt{2},$$

то теорему можно считать доказанной.

Замѣчаніе. Не останавливаясь на разсмотрѣніи тѣхъ круговъ системы (51), коихъ радіусъ $=\infty$, т.-е. которые обращаются въ прямыя линіи, а также и тѣхъ, кои (для исключит. случаевъ 2-го рода) приводятся къ точкамъ (исключит. 2-го рода), я закончу настоящее краткое изложеніе о связанныхъ съ формулой (51) сравнительно второстепенныхъ проявленіяхъ періодичности въ движеніяхъ 2-ой группы 2-го класса указаньемъ одной не безъинтересный подробности въ расположеніи круга (51′) въ случаѣ (2*b*) не асимптот. движеній.

---

[1] Ср. формулу (42).

Именно нетрудно убѣдиться, что и этотъ кругъ проходитъ тутъ черезъ общія точки пересѣченья круговъ:

$$s_1=e_1,\ s_2=e_3,\ x_1x_2=k.$$

Что касается расположенья круга (51′) въ другихъ ($2a$) случаяхъ, то легко видѣть, что тамъ онъ никогда не пересѣкается ни съ кругами вида $s=e_\alpha$ (ср. теорему XII), ни съ кругомъ $x_1x_2=k$, но пересѣченье съ кругами (20а) существуетъ всегда.

§ 5а. Въ этомъ параграфѣ, гдѣ мы будемъ разсматривать наиболѣе важныя проявленія періодичности, характерныя какъ для изучаемыхъ простѣйшихъ движеній, такъ и вообще для вращенья гироскопа С. В. Ковалевской, я буду опираться уже не на равенство (51), а на новую форму подобнаго соотношенія, которая сравнительно просто позволитъ намъ многое разъяснить въ данномъ вопросѣ, но разъяснить однако не все. Для болѣе полнаго освѣщенья законовъ періодичности движенія гироскопа оказывается необходимымъ привлечь и такія формулы, которыя содержатъ аргументъ u, т.-е., иначе говоря, необходимо не частичное только, но полное рѣшеніе [1]) диф. ур-ій задачи.

Это само по себѣ интересное обстоятельство выяснится изъ дальнѣйшаго, теперь же я начну съ вывода формулы, аналогичной (51).

Не трудно убѣдиться, что, если положить согласно съ § 4а

$$3l_1=2l^2+k,\ e_\gamma=e_4=2l^2,\ e_\alpha e_\beta=1,$$

то всегда будемъ имѣть, на основаніи равенствъ (46),

$$r-2l\gamma''=\frac{\frac{1}{\varphi'(e_\alpha)}\left(\sqrt{2e_\alpha}-2l\sqrt{e_\beta}\sqrt{e_\gamma}\right)P_{\beta\gamma}+\frac{1}{\varphi'(e_\beta)}\left(\sqrt{2e_\beta}-2l\sqrt{e_\gamma}\sqrt{e_\alpha}\right)P_{\gamma\alpha}}{\frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}P_\alpha+\frac{\sqrt{e_\beta}}{\varphi'(e_\beta)}P_\beta+\frac{\sqrt{e_\gamma}}{\varphi'(e_\gamma)}P_\gamma},$$

---

[1]) Само собою очевидно, что для разъясненія дѣла можно съ самаго начала пользоваться полнымъ рѣшеньемъ.

откуда съ помощью второй изъ формулъ (45) и тождествъ (37), которымъ можно придать форму:

$$iP_{\gamma\alpha}=P_\gamma\frac{\sigma_\lambda(u)}{\sigma(u)},\quad iP_{\beta\gamma}=P_\gamma\frac{\sigma_\mu(u)}{\sigma(u)}\ ^{1)},$$

получимъ

$$r-2l\gamma''=-2P_\gamma q\Big[(\sqrt{e_\alpha}-l\sqrt{e_\beta}\sqrt{e_\gamma}\sqrt{2})\,\frac{\sigma_\mu(u)}{\sigma(u)}\cdot\frac{1}{\varphi'(e_\alpha)}+$$

$$+\,(\sqrt{e_\beta}-l\sqrt{e_\gamma}\sqrt{e_\alpha}\sqrt{2})\frac{\sigma_\lambda(u)}{\sigma(u)}\cdot\frac{1}{\varphi'(e_\beta)}\Big],$$

гдѣ

$$P_\gamma q=\frac{1}{2i}\Big[\sqrt{2e_\gamma}(x_1x_2-e_\gamma+3l_1)+\frac{2l}{\sqrt{2e_\gamma}}(x_1+x_2)\Big]$$

въ силу соотвѣтствующаго равенства (8).

На основаніи условія (44) и равенства:

$$\varphi'(e_\alpha)=-\frac{(e_\alpha-e_\beta)(e_\beta-e_\gamma)(e_\gamma-e_\alpha)}{e_\beta-e_\gamma}$$

будемъ въ концѣ концевъ имѣть послѣ нѣкоторыхъ упрощеній:

$$r-2l\gamma''=i\big[2l(x_1x_2+k)+(x_1+x_2)\big]\Big[\sqrt{e_\alpha}\frac{\sigma_\lambda(u)}{\sigma(u)}-$$

$$-\sqrt{e_\beta}\frac{\sigma_\mu(u)}{\sigma(u)}\Big]\frac{1}{(e_\beta-e_\alpha)}.\tag{52}$$

Исходя изъ этого соотношенія, не трудно доказать слѣдующую теорему:

Теорема XVIII. *При всѣхъ* [2] *не особо-замѣчательныхъ и не асимптотическихъ къ перманентнымъ вращеньямъ движеніяхъ 2-ой группы 2-го класса полярная ось (r) гироскопа С. В. Кова-*

---

[1] Индексы λ и μ и здѣсь опредѣляются, согласно съ § 4а, равенствомъ: $\bar{e}_\lambda+e_\alpha=\bar{e}_\mu+e_\beta=\frac{2}{3}\Delta$.

[2] И соотвѣт. переходныхъ, для которыхъ $e_\alpha\neq e_\beta$, т. е. $1=4kl^2$.

левской можетъ занимать вертикальное положеніе только въ моменты времени, опредѣляемые изъ ур-ія:

$$\sqrt{e_\alpha}\sigma_\lambda(u)-\sqrt{e_\beta}\sigma_\mu(u)=0. \tag{53}$$

Дѣйствительно, такъ какъ при вертикальности оси (r) должно имѣть (см. теорему VIII) $r-2l\gamma''=0$, то, если движеніе не особо-замѣчательное, и если для исключительнаго движенія 2-го рода моментъ вертикальности оси (r) не совпадаетъ съ моментомъ прохожденія Ω_1 черезъ исключительную точку, равенство $r-2l\gamma''=0$ влечетъ за собою равенство:

$$\sqrt{e_\alpha}\,\sigma_\lambda(u)-\sqrt{e_\beta}\sigma_\mu(u)=0.$$

Для исключительныхъ движеній 2-го рода въ тѣхъ [1]) случаяхъ, когда вертикальность оси (r) наблюдалась бы въ моменты прохожденія Ω_1 черезъ исключительныя точки, мы должны бы были имѣть одновременно:

$$r-2l\gamma''=0,\quad 2l(x_1x_2+k)+(x_1+x_2)=0,$$

что затрудняетъ доказательство теоремы.

Но легко усмотрѣть, что въ этомъ случаѣ на основаніи формулы (36), соотвѣтствующаго равенства (8) и выраженія q черезъ t (см. равенство (45)) имѣемъ:

$$\frac{2l(x_1x_2+k)+x_1+x_2}{\sigma(u)}=\frac{P_4qi\sqrt{e_4}}{\sigma(u).l}=$$

$=$нѣкоторой отличной отъ O постоянной, дѣленной на голоморфную функцію отъ t.

Т. о. и здѣсь $r-2l\gamma''=0$ только, если $\sqrt{e_\alpha}\sigma_\lambda(u)-\sqrt{e_\beta}\sigma_\mu(u)=0$.

Но такъ какъ одновременно должно бы имѣть $\sigma(u)=0$

---

[1]) Собственно говоря, подобное можно допустить только, если соотвѣт. исключительная точка $(p=-l,\ q=\pm\sqrt{1-(l^2+k)})$ лежитъ на кругѣ $x_1x_2=k$, т. е. при $k=\frac{1}{2}\cdot$ Этотъ случай можно было бы разсматривать какъ предѣльный.

($u=0, 2\omega_2, 4\omega_2 \ldots$), то нетрудно показать, что подобныя совпаденія моментовъ невозможны.

Замѣчаніе. Изъ доказанной теоремы также слѣдуетъ, что $r-2l\gamma''$ въ случаяхъ движеній 2-го класса или постоянно равняется 0 (для особо-замѣчательныхъ движеній), или можетъ быть 0 только въ моментъ вертикальности оси (r).

При асимптотичности къ перманетнымъ вращеніямъ (около оси p) $\lim(r-2l\gamma'')=0$.

Теорема XIX. *Во всѣхъ перечисленныхъ въ теоремѣ XVIII движеніяхъ гироскопа С. В. Ковалевской полярная его ось будетъ дѣйствительно занимать вертикальное положеніе въ нѣкоторые моменты, періодически повторяющіеся черезъ промежутки времени $2\omega_2\sqrt{2}$ для исключительныхъ движеній 2-го рода и черезъ промежутки, равные $4\omega_1\sqrt{2}$, для прочихъ случаевъ. Внѣ же этихъ моментовъ* 1) *вертикальности оси (r) не будетъ наблюдаться.*

Для доказательства теоремы займемся сначала рѣшеніемъ ур-ія (53).

1) Въ исключительныхъ случаяхъ 2-го рода это ур-іе будетъ имѣть видъ:

$$\sqrt{e_2}\sigma_1(u)-\sqrt{e_3}\sigma_3(u)=0,$$

или

$$\sqrt{\bar{e}_3-\bar{e}_2}\,\sigma_1(u)+\sqrt{\bar{e}_1-\bar{e}_2}\,\sigma_3(u)=0 \text{ }^{2)}.$$

На основаніи извѣстнаго соотношенія между функціями σ

$$(\bar{e}_2-\bar{e}_3)\sigma_1^2(u)+(\bar{e}_3-\bar{e}_1)\sigma_2^2(u)+(\bar{e}_1-\bar{e}_2)\sigma_3^2(u)=0, \qquad (53')$$

которому можно здѣсь придать форму:

$$(\bar{e}_1-\bar{e}_3)\sigma_2^2(u)=\Big[\sqrt{\bar{e}_1-\bar{e}_2}\,\sigma_3(u)+$$

$$+\sqrt{\bar{e}_3-\bar{e}_2}\,\sigma_1(u)\Big]\Big[\sqrt{\bar{e}_1-\bar{e}_2}\,\sigma_3(u)-\sqrt{\bar{e}_3-\bar{e}_2}\,\sigma_1(u)\Big],$$

---

1) Промежутки времени $2\omega_2\sqrt{2}$ и $4\omega_1\sqrt{2}$ мы будемъ наз. періодами колебанія оси (r) въ соотвѣт. движеніяхъ.

2) Ср. обозначенія теоремы XVII.

можемъ заключить, что корни ур-ія (53) суть также корни ур-ія:

$$\sigma_2(u)=0.$$

Но корни послѣдняго суть

$$u=\omega_2+2m_1\omega_1+2m_2\omega_2,$$

гдѣ m_1 и m_2 означаютъ любыя цѣлыя числа.

Такъ какъ ω_1 есть комплексная величина, то дѣйствительны могутъ быть только корни вида:

$$(2m+1)\omega_2.$$

Нетрудно убѣдиться (см. доказательство теоремы XVII), что всегда

$$\sqrt{e_2}\sigma_1(\omega_2+2m\omega_2)-\sqrt{e_3}\sigma_3(\omega_2+2m\omega_2)=0.$$

Такимъ образомъ всѣ дѣйствительныя рѣшенія ур-ія (53) здѣсь найдены, но для даннаго случая $\left(u=\frac{-t}{\sqrt{2}}\right)$ только они и должны приниматься въ расчетъ.

2) Для всѣхъ прочихъ случаевъ разсматриваемыхъ движеній можно положить

$$\lambda=1,\ \mu=2,\ e_\alpha=e_5-e_\beta=\bar{e}_2-\bar{e}_3,\ e_\beta=e_5-e_\alpha=\bar{e}_1-\bar{e}_3,$$

вводя знакъ $\left|\sqrt{\ }\right|$ для указанія положительныхъ значеній корней.

Такимъ образомъ, если $\sqrt{e_\alpha}\sqrt{e_\beta}=+1$, то ур-іе (53) приметъ здѣсь видъ:

$$\left|\sqrt{\bar{e}_2-\bar{e}_3}\right|\sigma_1(u)-\left|\sqrt{\bar{e}_1-\bar{e}_3}\right|\sigma_2(u)=0,$$

а при $\sqrt{e_\alpha}\sqrt{e_\beta}=-1$ видъ:

$$\left|\sqrt{\bar{e}_2-\bar{e}_3}\right|\sigma_1(u)+\left|\sqrt{\bar{e}_1-\bar{e}_3}\right|\sigma_2(u)=0.$$

Такъ какъ по предыдущему можно показать, что всѣ корни этихъ ур-ій, будучи одновременно корнями ур-ія $\sigma_3(u)=0$, должны быть вида:

$$u=\omega_3+2m_1\omega_1+2m_3\omega_3,$$

то на основаніи [1]) формулъ теоріи эллипт. функцій

$$\sigma_1(\omega_3)=\sqrt{e_3-e_1}\,\sigma(\omega_3),\qquad \sqrt{e_3-e_1}=-i\left|\sqrt{e_1-e_3}\right|,$$

$$\sigma_2(\omega_3)=\sqrt{e_3-e_2}\,\sigma(\omega_3),\qquad \sqrt{e_3-e_2}=-i\left|\sqrt{e_2-e_3}\right|,$$

и общихъ свойствъ функцій σ не трудно убѣдиться, что, если начальныя обстоятельства движенія приводятъ къ условію:

$$\sqrt{e_\alpha}\sqrt{e_\beta}=+1, \tag{54}$$

то всѣ корни ур-ія (53) будутъ вида:

$$u=\omega_3+4m\omega_1+2m_3\omega_3,$$

а, если $\sqrt{e_\alpha}\sqrt{e_\beta}=-1$ (54′), вида

$$u=\omega_3+(4m+2)\omega_1+2m_3\omega_3.$$

Изъ этихъ корней дѣйствительнымъ моментамъ будутъ соотвѣтствовать только корни:

$$u=\pm\omega_3+4m\omega_1 \text{ при условіи (54)}$$

и

$$u=\pm\omega_3+(4m+2)\omega_1 \text{ для условія (54′)}.$$

Найденныя въ 1) случаѣ рѣшенія опредѣляютъ моменты времени

$$T=(2n+1)\omega_2\sqrt{2},$$ [2])

а во 2) моменты

$$T=(4n\omega_1\mp\tau_0)\sqrt{2} \text{ при условіп (54)}$$

и

$$T=[(4n+2)\omega_1\mp\tau_0]\sqrt{2}, \text{ если } \sqrt{e_\alpha}\sqrt{e_\beta}=-1.$$

Для окончательнаго доказательства теоремы остается только обнаружить, что вертикальное положеніе будетъ дѣйстви-

---

[1]) Halphen. loco citato. Стр. 191 и 192. Случай положительнаго дискриминанта. Ср. также доказательство теоремы XVII′.

[2]) Цѣлое число n можно здѣсь, какъ и всюду далѣе, считать совершенно произвольнымъ.

тельно достигаемо осью (r) во всѣ указанные выше моменты.

Съ этой цѣлью можно воспользоваться выведеннымъ въ § 4. выраженьемъ косинуса γ'' черезъ t.

Этотъ прiемъ позволитъ весьма скоро разрѣшить вопросъ, но въ то же время можно вполнѣ выяснить нашу теорему, и не выходя изъ предѣловъ формулы (52), т. е. съ помощью частичнаго рѣшенья диф. ур-iй задачи.

Послѣднее однако связано съ невозможностью переступить въ нѣкоторыхъ направленiяхъ границы данной теоремы, что намъ будетъ необходимо для освѣщенiя одной существенной подробности движенiя. Поэтому, хотя такое доказательство и будетъ мною тоже приведено, но, т. с., во вторую очередь.

I. Такимъ образомъ для доказательства по первому способу возьмемъ:

$$\gamma''=\frac{\sqrt{e_\gamma}\sqrt{e_\beta}(e_\beta-2l^2)Z_{\mu4}+\sqrt{e_\alpha}\sqrt{e_\gamma}(2l^2-e_\alpha)Z_{\lambda4}+\sqrt{e_\beta}\sqrt{e_\alpha}(e_\alpha-e_\beta)Z_{\lambda\mu}}{\sqrt{e_\alpha}(e_\beta-2l^2)Z_\lambda+\sqrt{e_\beta}(2l^2-e_\alpha)Z_\mu+\sqrt{e_\gamma}(e_\alpha-e_\beta)Z_4}i. \qquad (55)$$

1) Полагая здѣсь:

$$\alpha=2, \beta=3,\ \lambda=1,\ \mu=3,\ \sqrt{e_\alpha}\sqrt{e_\beta}=-1,\ \sqrt{e_\gamma}=-l\sqrt{2},$$

на основанiи равенствъ (40′) и (41) получимъ для исключительныхъ движенiй 2-го рода въ моменты

$$T=(2n+1)\omega_2\sqrt{2}(u=-(2n+1)\omega_2):$$

$$\gamma''=\frac{\left[(e_2-e_3)\sqrt{e_2}\sqrt{e_3}\sqrt{e_2-e_1}\sqrt{e_2-e_3}\right]\mathrm{snh}(w+(2n+1)\eta_2 v)+\frac{\sigma_2(v)}{\sigma(v)}l\sqrt{2}\left[\sqrt{e_2}(2l^2-e_2)\sqrt{e_2-e_1}+\sqrt{e_3}(e_3-2l^2)\sqrt{e_2-e_3}\right](-1)^n}{\left[\sqrt{e_2}(e_3-2l^2)\sqrt{e_2-e_1}+\sqrt{e_3}(2l^2-e_2)\sqrt{e_2-e_3}\right](-1)^n\mathrm{snh}(w+(2n+1)\eta_2 v)+\frac{\sigma_2(v)}{\sigma(v)}l\sqrt{2}(e_2-e_3)}(-i).$$

Такъ какъ въ данномъ случаѣ

$$\sqrt{e_2-e_1}=-i\sqrt{e_1-e_2}=-i\sqrt{e_3},$$

$$\sqrt{e_2-e_3}=i\sqrt{e_3-e_2}=i\sqrt{e_2},$$

то не трудно убѣдиться, что предыдущее выраженіе для γ'' приведется къ виду:

$$\gamma'=(-1)^n\frac{i(-1)^n\operatorname{snh}(w+(2n+1)\eta_2 v)+\frac{\sigma_2(v)}{\sigma(v)}l\sqrt{2}\sqrt{e_2}\sqrt{\bar{e}_3}}{\sqrt{e_2}\sqrt{\bar{e}_3}(-1)^n i\operatorname{snh}(w+(2n+1)\eta_2 v)+\frac{\sigma_2(v)}{\sigma(v)}l\sqrt{2}},$$

гдѣ

$$w=-\frac{T}{\sqrt{2}}\zeta(v)+w_0,$$

какъ въ первой формулѣ и послѣдующихъ.

Если

$$\sqrt{e_2}\sqrt{\bar{e}_3}=-\sqrt{\bar{e}_2}\sqrt{e_3}$$

равняется $+1$, что соотвѣтствуетъ опредѣленному характеру начальныхъ данныхъ, то изъ выведеннаго равенства будемъ имѣть:

$$\gamma''_{t=T}=(-1)^n,$$

а, если

$$\sqrt{e_2}\sqrt{\bar{e}_3}=-1,$$

что соотвѣтствуетъ нѣкоторому другому характеру начальныхъ данныхъ (см. § 4а), то

$$\gamma''_{t=T}=(-1)^{n+1}.$$

Полученные результаты доказываютъ справедливость въ данномъ случаѣ теоремы XIX.

2) Для доказательства ея въ прочихъ случаяхъ движеній 2-й группы 2-го класса положимъ въ равенствѣ (55) согласно съ раньше принятыми обозначеніями:

$$\lambda=1,\ \mu=2,\ e_\alpha=\bar{e}_2-\bar{e}_3,\ e_\beta=\bar{e}_1-\bar{e}_3.$$

Тогда при условіи (54) γ'' будетъ равняться [1]) въ моменты:

$$T=(4n\omega_1\mp\tau_0)\sqrt{2}:$$

---

[1]) Всюду верхніе знаки въ формулахъ соотвѣтствуютъ знаку — передъ τ_0, а нижніе знаку $+$.

$$\gamma''=\frac{\pm\left[(e_\alpha-e_\beta)\sqrt{e_\alpha}\sqrt{e_\beta}\left|\sqrt{e_1-e_3}\right|\left|\sqrt{e_2-e_3}\right|\right]\operatorname{snh}\left[w+(4n\omega_1\mp\omega_3)v\right]+}{\left[\sqrt{e_\alpha}(e_\beta-2l^2)\left|\sqrt{e_1-e_3}\right|+\sqrt{e_\beta}(2l^2-e_\alpha)\left|\sqrt{e_2-e_3}\right|\right]\operatorname{snh}\left[w+(4n\omega_1\mp\omega_3)v\right]\pm}$$

$$\frac{+i\frac{\sigma_3(v)}{\sigma(v)}l\sqrt{2}\left[\sqrt{e_\alpha}(2l^2-e_\alpha)\left|\sqrt{e_1-e_3}\right|+\sqrt{e_\beta}(e_\beta-2l^2)\left|\sqrt{e_2-e_3}\right|\right]}{\pm i\frac{\sigma_3(v)}{\sigma(v)}l\sqrt{2}(e_\alpha-e_\beta)},$$

откуда, если

$$\sqrt{e_\alpha}=\left|\sqrt{e_\alpha}\right|.$$

то

$$\gamma''_{t=T}=\mp 1,$$

а если

$$\sqrt{e_\alpha}=-\left|\sqrt{e_\alpha}\right|,$$

то

$$\gamma''_{t=T}=\pm 1.$$

При условіи (54′) получимъ для моментовъ

$$T=[(4n+2)\omega_1\mp\tau_0]\sqrt{2}:$$

$$\gamma''=\frac{\pm\left[(e_\alpha-e_\beta)\sqrt{e_\alpha}(-\sqrt{e_\beta})\left|\sqrt{e_1-e_3}\right|\left|\sqrt{e_2-e_3}\right|\right]\operatorname{snh}\left[w+((4n+2)\omega_1\mp\omega_3)v\right]+}{\left[\sqrt{e_\alpha}(e_\beta-2l^2)\left|\sqrt{e_1-e_3}\right|-\sqrt{e_\beta}(2l^2-e_\alpha)\left|\sqrt{e_2-e_3}\right|\right]\operatorname{snh}\left[w+((4n+2)\omega_1\mp\omega_3)v\right]\pm}$$

$$\frac{+i\frac{\sigma_3(v)}{\sigma(v)}l\sqrt{2}\left[\sqrt{e_\alpha}(2l^2-e_\alpha)\left|\sqrt{e_1-e_3}\right|-\sqrt{e_\beta}(e_\beta-2l^2)\left|\sqrt{e_2-e_3}\right|\right]}{\pm i\frac{\sigma_3(v)}{\sigma(v)}l\sqrt{2}(e_\alpha-e_\beta)},$$

откуда по предыдущему

$$\gamma''_{t=T}=\mp 1,$$

если

$$\sqrt{e_\alpha}=\left|\sqrt{e_\alpha}\right|,$$

и

$$\gamma''_{t=T}=\pm 1,$$

если

$$\sqrt{e_\alpha}=-\left|\sqrt{e_\alpha}\right|.$$

Слѣдовательно наша теорема доказана.

II. Чтобы доказать ее же, опираясь лишь на частичное рѣшеніе диф. ур—ій задачи, т. е. не прибѣгая къ выраженію γ'' черезъ t, я обращу вниманіе на слѣдующее обстоятельство.

Изъ рѣшенія ур—ія $\sqrt{e_\alpha}\sigma_\lambda(u)-\sqrt{e_\beta}\sigma_\mu(u)=0$ на основаніи равенства (53′) *мы должны заключить, что корни этого ур—ія суть двойные,* ибо для нихъ имѣемъ всегда $\sigma_\nu{}^2(u)=0$ (λ, μ, $\nu=1$, 2, 3), но $\sqrt{e_\alpha}\sigma_\lambda(u)+\sqrt{e_\beta}\sigma_\mu(u)\neq0$.

Но тогда во всѣ соотвѣтствующіе моменты ¹) не только выраженіе $r-2l\gamma''$, но и его производная по времени будутъ равны 0 въ силу равенства (52).

Не трудно убѣдиться, что диф. ур—ія задачи даютъ

$$\frac{d}{dt}(r-2l\gamma'')=\gamma'(1+2pl)-2lq\gamma.$$

Слѣдовательно въ разсматриваемые моменты имѣемъ одновременно:

$$r-2l\gamma''=0,$$

$$\frac{\gamma}{\gamma'}=\frac{p+\frac{1}{2l}}{q}$$, но не $p+\frac{1}{2l}=q=0$ (иначе дв. будетъ о. замѣчат.),

такъ что для данныхъ моментовъ можно полагать:

$$\gamma=(1+2pl)h,\ \gamma'=2lqh$$

и въ случаѣ $h=0$ теорему можно считать доказанной. Остается такимъ образомъ изслѣдовать только случаи $h\neq0$.

Исключивъ съ помощью перваго изъ написанныхъ равенствъ количества r и γ'' изъ ур—ій 1-го и 2-го алг. интеграловъ (5), получимъ:

$$p^2+q^2-k=\gamma(1+2pl)+2ql\gamma',$$

а по исключеніи тѣхъ же количествъ изъ 2-го и 3-го ур—ій (5) найдемъ:

$$p\gamma+q\gamma'=l(\gamma^2+\gamma'^2).$$

---

¹) Для которыхъ, какъ очевидно, всегда $\sigma(u)\neq0$.

Отсюда на основаніи соотношеній:

$$\gamma=(1+2pl)h,\ \gamma'=2lqh$$

нетрудно убѣдиться, что

$$h(p^2+q^2-k)=\gamma^2+\gamma'^2$$

и, слѣдовательно,

$$p\gamma+q\gamma'=hl(p^2+q^2-k).$$

Послѣднее равенство даетъ послѣ почленнаго дѣленія на h:

$$p(1+2pl)+2lq^2=l(p^2+q^2-k),$$

откуда

$$(p^2+q^2)l+p+kl=0.$$

Но это послѣднее ур—іе есть ур—іе окружности ($20a$), служащей траэкторіей точки Ω_1 въ особо-замѣчательныхъ движеніяхъ 2-ой группы 2-го класса.

Какъ извѣстно, во всѣхъ случаяхъ, кромѣ исключительныхъ 2-го рода, разъ точка Ω_1 находится на этой окружности, то она и не сойдетъ съ нея и движеніе будетъ особо-замѣчательнымъ.

Въ исключительныхъ случаяхъ 2-го рода моменты прохожденія черезъ исключительныя $\left(p=-l, q=\pm\sqrt{1-(l^2+k)}\right)$ точки, лежащія на той же окружности, будутъ наблюдаться всегда и при не особо-замѣчательныхъ движеніяхъ, но эти моменты никогда¹) не будутъ совпадать съ моментами, о которыхъ идетъ рѣчь въ теоремахъ XVIII и XIX, ибо первые соотвѣтствуютъ значеніямъ $u=0$, $2\omega_2$, $4\omega_2$ и т. д.

Такимъ образомъ для всѣхъ не особо-замѣчательныхъ и не асимптотическихъ къ перманентнымъ вращеніямъ движеній нашу теорему можно считать доказанной, ибо тутъ въ указанные моменты, очевидно, всегда должно имѣть $h=0$.

Однако этотъ второй II пріемъ доказательства не позволяетъ намъ выяснить одну существенную сторону въ движе-

---

¹) Ср. доказательство теоремы XVIII.

ніи оси (r), что, наоборотъ, чрезвычайно легко можно сдѣлать на основаніи добытаго при первомъ I доказательствѣ.

Дѣйствительно, изъ полученныхъ тамъ выраженій для γ'' въ моменты $t=T$ непосредственно вытекаетъ слѣдующая важная теорема, предѣльно вѣрная и для переход. случаевъ.

Теорема XX. *Во всѣхъ не особо-замѣчательныхъ движеніяхъ 2-ой группы 2-го класса гироскопа С. В. Ковалевской, гдѣ полярная ось (r) періодически занимаетъ вертикальное положеніе, она направлена въ подобные моменты или постоянно вверхъ или внизъ, кромѣ случаевъ исключительныхъ движеній 2-го рода, когда оба эти направленія оси смѣняются поочередно.*

Замѣчаніе. Такимъ образомъ между 2-мя послѣдоват. вертик. одноименными положеніями оси (r) при указанныхъ въ теоремѣ XX движеніяхъ всегда лежитъ промежутокъ времени, равный $4\omega\sqrt{2}$, гдѣ ω есть дѣйствительный полуперіодъ соотвѣт. эллиптическихъ функцій.

Этотъ промежутокъ мы будемъ называть временемъ оборота ¹) *гироскопа и обозначать черезъ* ω_0.

Далѣе мы имѣемъ слѣдующія предложенія, одинаково вытекающія какъ изъ полнаго, такъ и изъ частичнаго рѣшенія задачи.

Теорема XXI. *Колебанія полярной оси (r) гироскопа С. В. К. отъ одного вертикальнаго положенія къ другому обладаютъ для тѣхъ изъ указанныхъ выше группъ движеній, для которыхъ сумма постоянныхъ l^2+k (или, что тоже, квадратъ главнаго момента количества движенія въ моментъ вертикальности оси (r)) имѣетъ одинакую величину, свойствомъ изохронности.*

Справедливость этой теоремы непосредственно очевидна изъ указаннаго еще въ 1-ой работѣ свойства періодовъ зависѣть только отъ l^2+k (обратно, l^2+k опредѣлимо по періоду).

Такимъ образомъ въ каждомъ случаѣ время оборота гироскопа С. В. Ковалевской равняется точному времени полнаго

---

¹) Время оборота надо отличать для исключит. движеній 2-го рода отъ т. н. нами періода колебанія оси (r), который тогда равенъ $2\omega\sqrt{2}$, ибо на 1 оборотъ тутъ приходятся 2 верт. положенія оси. Для прочихъ движеній, разсматриваемыхъ здѣсь, эти оба понятія совпадаютъ.

колебанія (конечной амплитуды) нѣкотораго маятника ($q \neq 0$), осуществляемаго тѣмъ же гироскопомъ при его вращеніи около оси q, расположенной горизонтально, если угловая скорость q_0 маятника въ моментъ вертикальности оси (r) выбрана такъ, что $q_0 = \sqrt{l^2+k}$. Въ частности, если мы имѣемъ движенія 2-ой группы 2-го класса, для которыхъ начальная угловая скорость (въ моментъ вертик. (r)) представляется равной по величинѣ и одинаково оріентированной относительно полярной оси, то колебанія послѣдней для нихъ изохронны.

Замѣчаніе I. Если начальная угловая скорость Ω_0 гироскопа, соотвѣтствующая моменту вертикальности оси (r), достаточно велика, то для вычисленія времени оборота гироскопа можно пользоваться слѣдующей приближенной формулой.

Именно, такъ какъ при достаточно большой скорости Ω_0 время оборота ω_0 равно

$$\omega_0 = 4\omega_1\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}[\Delta-\sqrt{\Delta^2-4}]} \frac{ds}{\sqrt{(\Delta-s)[s(s-\Delta)+1]}} =$$

$$= 2\sqrt{2}\int_{-\infty}^{0} \frac{ds}{\sqrt{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}} + 2\sqrt{2}\int_{0}^{\frac{1}{2}[\Delta-\sqrt{\Delta^2-4}]} \frac{ds}{\sqrt{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}};$$

и не трудно убѣдиться, что первый изъ 2-хъ послѣднихъ интеграловъ равняется $\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}$ съ ошибкой порядка $\frac{1}{\Delta^{\frac{3}{2}}}$, а второй весь будетъ порядка $\frac{1}{\Delta}$, то приблизительно (съ ошибкой порядка $\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$) будемъ имѣть:

$$\omega_0 . \sqrt{l^2+k} = 2\pi.$$

Такъ какъ въ предѣлѣ для очень большихъ угловыхъ скоростей движеніе всякаго тяжелаго гироскопа почти совпадаетъ съ движеніемъ по инерціи, то предыдущая упрощенная формула тождественна съ той, которую прямо можно получить изъ законовъ движенія Эйлера-Пуансо для твердаго тѣла съ моментами инерціи относительно точки опоры $A=B=2C$.

Какъ извѣстно, такое твердое тѣло будетъ двигаться такъ, что ось (r) его будетъ описывать, равномѣрно вращаясь, нѣкоторый круговой конусъ около оси импульса.

Если такой конусъ проходитъ черезъ вертикаль, то для него періодъ обращенія оси (r) и будетъ совпадать съ вычисленнымъ выше временемъ оборота гироскопа.

Замѣчаніе II. Теорему XXI можно распространить и на случай, когда мы сравниваемъ движенія нѣсколькихъ гироскоповъ С. В. Ковалевской.

Именно въ силу ур-ій (4) мы въ правѣ заключить, что соотвѣтствующіе законы движеній такихъ гироскоповъ выражаются одинаковыми формулами съ различіемъ только въ выборѣ единицъ для измѣренія времени (т. е. это суть подобныя движенія), которыя всегда нами выбирались для каждаго гироскопа такъ, что

$$C=Mgx_0{}^{1}).$$

Если бы сдѣлать выборъ единицъ измѣренія времени разъ навсегда, напр., принявъ за таковую секунду, то въ ур-ія (4) входило бы въ качествѣ единственнаго параметра, отличающаго формулы одного гироскопа отъ формулъ другаго, частное $\frac{Mgx_0}{C}$.

Этотъ параметръ, какъ не трудно убѣдиться, равняется

$$\frac{Mgx_0}{C}=\frac{g}{L}=\frac{\pi^2}{T_r^2},$$

гдѣ L есть длина математическаго маятника, соотвѣтствующаго тому сложному, который можно осуществить, заставивъ изучаемый гироскопъ производить малыя колебанія около оси (r), помѣщенной горизонтально, а T_r означаетъ время такого колебанія (полнаго).

---

[1]) C означаетъ здѣсь моментъ инерціи относительно оси (r). M—масса гироскопа, а x_0—координата его центра тяжести.

При одинаковыхъ T_r гироскопы С. В. К. въ механическомъ смыслѣ совершенно одинаковы.

Такъ какъ при постоянной единицѣ времени, напр., секундѣ будемъ имѣть:

$$l^2+k=\left(\frac{r_0^2}{4}+q_0^2+p_0^2\right)\frac{C}{Mgr_0}=\left(\frac{r_0^2}{4}+q_0^2+p_0^2\right)\frac{T_r^2}{\pi^2};$$

гдѣ $r_0{.}q_0{.}p_0$, суть слагающія угловой скорости Ω_0, то на основаніи выраженія полупеSріодовъ ω черезъ l^2+k легко убѣдиться въ справедливости слѣдующей теоремы.

Теорема XXI′. *Если для движеній 2-ой группы 2-го класса изучаемыхъ гироскоповъ С. В. К. произведеніе* $T_r\sqrt{\frac{r_0^2}{4}+q_0^2+p_0^2}$ *сохраняетъ одну и ту же величину, то для такихъ движеній и частное* $\frac{\omega_0}{T_r}$ *будетъ одинаковымъ.*

Слѣдствія. При одинакихъ T_r мы возвращаемся къ предшествовавшей теоремѣ.

Если одинаковы углы μ наклона мгновенной оси вращенія къ вертикали въ моменты совпаденія съ послѣдней оси (r) (см. § 3 гл. III ст. 1), то одинаковость произведенія $\Omega_0\ T_r$ влечетъ и одинаковость частнаго $\frac{\omega_0}{T_r}$.

Если одинаковы угловыя скорости Ω_0, то одинаковость произведенія $T_r\sqrt{1+3sn^2\mu}$ влечетъ и одинаковость частнаго $\frac{\omega_0}{T_r}$.

Замѣчаніе. Если обозначить угловую скорость Ω_0 черезъ равную ей величину $\Omega_0=2\pi n$, гдѣ n число оборотовъ около оси въ секунду, то критеріи $l^2+k><1$ и $4l^2k><1$ принадлежности движеній 2 группы къ тому или другому типу примутъ слѣд. видъ (единица времени—секунда):

$$l^2+k=n^2(1+3sn^2\mu)T_r^2,\quad 4kl^2=4n^4T_r^4(sn2\mu)^2.$$

Отсюда, напр.. не трудно убѣдиться, что при $2\mu=90^0$ должно имѣть

$$2n^2T_r^2>1.\ \text{иначе}\ \sqrt{2}nT_r>1.$$

если хотимъ получить движеніе типа $(2b)$.

Если для разсматриваемаго гироскопа $T_r=\frac{1}{2}$ (примѣрно), то при $n>\sqrt{2}$ движеніе будетъ искомаго вида.

Точно также можно было бы сдѣлать примѣрный подсчетъ ω_0 времени оборота гироскопа: $\omega_0=4\omega T_r\sqrt{2}:\pi$.

Для облегченія вычисленій воспользуемся для этого приближенной формулой по замѣнѣ тамъ ω_0 черезъ $\omega_0\pi:T_r$:

$$\omega_0\sqrt{l^2+k}=2T_r.$$

Если имѣемъ, напр., $\mu=90^0$, $\Omega_0=2\pi n$, гдѣ $n=12$, то, если $T_r=\frac{1}{2}$ сек., съ ошибкой порядка $\left(\frac{1}{12\sqrt{2}}\right)^2$ получимъ:

$$\omega_0=\frac{1}{12}\text{ секунды.}$$

Теорема XXII. *Во всѣхъ особо-замѣчательныхъ движеніяхъ, служащихъ предѣлами для указанныхъ выше простѣйшихъ, число становленій оси* (r) *вертикально будетъ за одно и то же число оборотовъ гироскопа (время оборота*$=4\omega\sqrt{2}$*) вдвое болѣе, чѣмъ въ соотвѣтствующихъ не особо-замѣчательныхъ.*

Это слѣдуетъ изъ извѣстныхъ свойствъ особо-замѣчательныхъ движеній. Отсюда же и изъ свойствъ 2-ой части равенства (52) вытекаетъ такая теорема.

Теорема XXIII. *Изъ движеній гироскопа С. В. Ковалевской, при которыхъ полярная ось его становится періодически вертикально, всѣ, обладающія характеромъ асимптотичности къ соотвѣт. особо-замѣчательнымъ, обладаютъ еще въ промежуткѣ между началомъ и концомъ каждаго періода колебаній моментомъ, когда ось* (r)*, не будучи строго вертикальной, по мѣрѣ возрастанія числа колебаній становится все ближе и ближе къ вертикальности равно какъ и къ правильной періодичности такого положенія, при все большей изохронности въ смыслѣ т. XXI.*

При движеніяхъ же типа ($2b$) *не можетъ быть произвольной близости оси* (r) *къ вертикали внѣ моментовъ, отмѣченныхъ въ теоремѣ XIX; подобнаго не можетъ быть и въ другихъ случаяхъ внѣ моментовъ, отмѣченныхъ въ настоящей теоремѣ.*

Замѣчаніе. Характеръ этихъ дополнительныхъ вертикальныхъ положеній оси (r) легко опредѣлится въ каждомъ случаѣ на основаніи свойствъ соотвѣт. особо-замѣчат. движеній. См. для этого замѣчаніе VI въ § 3.

Такъ какъ, какъ я уже указалъ въ § 3 гл. III ст. 1, въ дѣйствительности собственно осуществляются движенія гироскопа, лишь близкія къ разсматриваемымъ въ настоящей главѣ, то при наблюденіи асимптотическихъ формъ мы будемъ въ различныхъ стадіяхъ движенія замѣчать различныя числа вертикальныхъ положеній оси (r) за одно и то же время. Именно при приближеніи разсматриваемаго движенія къ его предѣлу число это будетъ возрастать, а при удаленіи убывать, никогда однако не падая ниже 1 или 2 (разноименныхъ—для исключит. движеній, поскольку послѣднія вообще осуществимыѓ) на цѣлый оборотъ гироскопа, при соблюденіи къ тому же въ ходѣ этихъ остающихся колебаній довольно строгой періодичности.

Лишь при не асимптотическихъ случаяхъ ($2b$) число вертикальныхъ положеній оси (r) будетъ довольно долгое (относительно) время равно 1 на 1 оборотъ, т. е. *будетъ сохраняться почти совершенно строгая періодичность отмѣченнаго явленія.*

Такимъ образомъ на основаніи всего предыдущаго изслѣдованія, равно какъ на основаніи извѣстныхъ ранѣе свойствъ особо-замѣчательныхъ и легко выводимыхъ свойствъ асимптотическихъ къ перманентнымъ вращеніямъ движеній 2-ой группы 2-го класса вертикальныя положенія оси (r) являются неотъемлемой, даже и при приближенномъ осуществленіи, принадлежностью[1] всѣхъ движеній изучаемой группы, кромѣ перманентныхъ вращеній (около оси p) и немногихъ изъ формъ къ нимъ асимптотическихъ (напр. маятнико-образное движеніе, соотвѣт. случаю: $k=1$, $l=0$, $3l_1=1$, $p=q=\gamma''=0$).

Но такъ какъ (см. теорему VIII) подобныя положенія полярной оси могутъ встрѣчаться только при движеніяхъ ука-

---

[1] Въ асимптот. къ перманент. вращеніямъ движеніяхъ вертикальность оси (r) наблюдается только въ извѣстной стадіи движенія.

занной группы, любое изъ которыхъ, благодаря имъ, (см. § 3 гл. III ст. 1) можно реализовать, то мы въ правѣ, какъ мнѣ кажется, формулировать слѣдующее предложеніе:

Теорема XXIV. *Полученіе осью (r) гироскопа С. В. Ковалевской вертикальнаго положенія является наиболѣе общимъ и характернымъ признакомъ движеній 2-ой группы 2-го класса.*

Что мы сейчасъ сказали о вертикальности оси (r) по отношенію къ движеніямъ 2-ой группы, тоже можно сказать о періодичности такихъ положеній оси по отношенію вообще къ движеніямъ гироскопа С. В. Ковалевской.

Такимъ образомъ мы получаемъ два новыхъ предложенія, изъ которыхъ одно было формулировано (безъ доказательства) еще въ моей 1-ой статьѣ (см. § 3 гл. III), а другое, базирующееся на 1-омъ и теоремѣ VIII-а, указано во вступительныхъ замѣчаніяхъ къ настоящей работѣ, предложенія, которыя, выставляя на видъ нѣкоторый общій законъ, наблюдаемый въ движеніи изучаемаго гироскопа, въ извѣстномъ смыслѣ связываютъ его нарождающуюся теорію съ классическими теоріями движеній Эйлера-Пуансо и Лагранжа-Пуассона.

Теорема XXV. *Если при какомъ-либо движеніи гироскопа С. В. Ковалевской полярная ось его стала вертикально, то она черезъ строго опредѣленные промежутки времени будетъ періодически возвращаться въ это положеніе, или же движеніе будетъ стремиться къ перманентному вращенію около оси подвѣса.*

Теорема XXVI. *Если взять сферу съ центромъ въ точкѣ опоры, радіусомъ, равнымъ угловой скорости Ω вращенія изучаемаго гироскопа (или же=главному моменту количества движенія J), и затѣмъ на поверхности ея построить сферическій треугольникъ съ одной неподвижной вершиной въ точкѣ пересѣченія сферы съ 1-мъ изъ направленій вертикали, съ другой вершиной въ точкѣ пересѣченія ея съ векторомъ Ω (или J) и съ третьей вершиной въ точкѣ, гдѣ сфера пересѣкается съ направленіемъ полярной оси (r), то какъ радіусъ сферы, такъ и элементы полученнаго треугольника будутъ для всѣхъ не асимптот. къ перманентнымъ вращеніямъ движеній періодическими функціями времени, но не безусловно, какъ это имѣетъ мѣсто для гироскопа Лагранжа, а при* *условіи, что указанное построеніе произведено для момента занятія осью* (r) *вертикальнаго положенія, какъ для момента начальнаго.*

Т. о. для гироскопа С. В. Ковалевской, аналогично съ гироскопомъ Лагранжа, всѣ его движенія, кромѣ асимптот. къ перманент. вращеніямъ, можно разбить какъ бы на 2 разряда: первый (движенія 2-ой группы 2-го класса), когда полярная ось (r) *періодически становится вертикальной, и второй, когда она всегда находится внѣ нѣкотораго конуса около вертикали (всѣ остальныя движенія).*

Замѣчаніе. Интересно отмѣтить, что, если взять гироскопъ Лагранжа съ тѣми же моментами инерціи, какъ у гироскопа С. В. К., и съ осью симметріи, направленной по его полярной оси, то перманентному вращенію около оси (r) 1-го гироскопа (toupie dormante, schlafender Kreisel) будетъ соотвѣтствовать во второмъ одно изъ переходныхъ движеній ($k=0$, $3l_1=2l^2$) отъ 1-го класса ко 2-му, если считать соотвѣт.[1] движенія, получающіяся при одинакихъ начальныхъ условіяхъ.

§ 6. Теоремами XXV и XXVI я закончу разсмотрѣніе общихъ свойствъ изслѣдуемой группы движеній, перейдя теперь къ выясненію нѣкоторыхъ любопытныхъ особенностей вращенія гироскопа С. В. К., наблюдаемыхъ при тѣхъ ($2b$) движеніяхъ 2-ой группы 2-го класса, которыя не принадлежатъ къ числу асимптотическихъ или строго-періодическихъ формъ. Особенности эти, сравнительно легко здѣсь подмѣчаемыя, являются, вообще говоря, не чѣмъ-то исключительно свойственнымъ данному явленію, но характерны вообще для явленій[2] съ сколько-нибудь сложной математической характери-

---

[1] Вообще должно замѣтить, что движенія гироскопа С. В. К. въ случаѣ $k=0$ имѣютъ извѣстную аналогію съ движеніями симметр. гироскопа, опредѣляемыми начальн. условіями $p_0=q_0=0$ (типа Пуассона). Аналогія эта выражается въ томъ, что и въ томъ и въ другомъ случаѣ угл. скорости p и q остаются всегда заключенными въ довольно тѣсныхъ предѣлахъ, а слагающая r, если она достаточно велика, будетъ оставаться такой все время движенія. Подобное же свойство можетъ наблюдаться, впрочемъ, и въ другихъ движеніяхъ обоихъ гироскоповъ.

[2] Ср., напримѣръ, задачу о движеніи матеріальной точки, притягиваемой по закону Ньютона 2-мя неподвижными центрами, какъ она из-

стикой, наличность которой такимъ образомъ отнюдь нельзя понимать какъ непремѣнное ручательство за ту ультра-правильность послѣднихъ, съ которой нашъ умъ, навыкнувъ къ тому на созерцанiи явленiй сравнительно простого перiодическаго или асимптотическаго характера, обычно склоненъ соединять представленiе объ явленiи, совершающемся по математическимъ законамъ.

Своеобразiе, которое можетъ тутъ проявляться и котораго примѣры отмѣчались не разъ и раньше въ математической литературѣ (см., напр., предшествующее примѣчанiе), будетъ намъ ясно, если мы ближе разсмотримъ для движенiй типа (2*b*) выраженiя для *p* и *q* черезъ время.

Оно будетъ тѣмъ болѣе замѣтно здѣсь, что наряду съ нимъ, какъ бы для сравненiя, будутъ наблюдаться и тѣ общiя перiодическiя законности, напр., въ колебанiи оси (*v*), о которыхъ мы говорили въ § 5.

Дѣйствительно, если подсчитать на основанiи формулъ для *p* и *q* положенiе точки Ω_1 на окружности $x_1x_2=k$ для моментовъ, соотвѣтствующихъ вертикальности оси (*v*), то при условiи (54) будемъ имѣть ($T=(4n\omega_1\mp\tau_0)\sqrt{2}$):

$$p_{t=T}=\frac{\left[\sqrt{e_1}\,l\sqrt{2}(e_1-2l^2)\left|\sqrt{e_1-e_3}\right|+\sqrt{e_3}\,l\sqrt{2}(2l^2-e_3)\left|\sqrt{e_2-e_3}\right|\right]\operatorname{snh}[w+(4n\gamma_1\mp\gamma_3)v]\pm}{\left[\sqrt{e_3}(e_1-2l^2)\left|\sqrt{e_1-e_3}\right|+\sqrt{e_1}(2l^2-e_3)\left|\sqrt{e_2-e_3}\right|\right]\operatorname{snh}[w+(4n\gamma_1\mp\gamma_3)v]\pm}$$

$$\frac{\pm\sqrt{e_1}\sqrt{e_3}(e_3-e_1)\frac{\sigma_3(v)}{\sigma(v)}\,i}{\pm l\sqrt{2}(e_3-e_1)\frac{\sigma_3(v)}{\sigma(v)}\,i}\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}}\,;$$

а при условiи (54′) подобное получится для моментовъ $T=[4n+2)\omega_1\mp\tau_0]\sqrt{2}$.

ложена у C. L. Charlier въ Die Mechanik des Himmels, Bd. I, Abschnitt 3. Подобными же свойствами должны обладать движенiя въ не перiод. и не асимптот. случаяхъ задачи о 3-хъ тѣлахъ и т. п.

Герпологiя въ движенiяхъ Э.-Пуансо, движенiе полюса гироскопа Лагранжа, траэкторiя сферич. маятника и т. д. обнаруживаютъ также нѣкоторыя этого рода черты, но въ сильно смягченной значит. долей правильной перiодичности формѣ.

Если $\sqrt{e_3}=|\sqrt{e_3}|$, то послѣ несложныхъ преобразованій будемъ имѣть:

$$p_{t=T}=-\frac{2kl\,\mathrm{snh}[w+(4n\eta_1\mp\eta_3)v]\mp i\sqrt{k}}{\mathrm{snh}[w+(4n\eta_1\mp\eta_3)v]\mp 2li\sqrt{k}}$$

и также найдемъ:

$$p_{t=T}+\frac{1}{2l}=-\frac{(4kl^2-1)\mathrm{snh}[w+(4n\eta_1\mp\eta_3)v]}{2l\{\mathrm{snh}[w+(4n\eta_1\mp\eta_3)v]\mp 2li\sqrt{k}\}}.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ легко убѣдиться, что

$$q_{t=T}=-\frac{\sqrt{4kl^2-1}.\sqrt{k}\cosh[w+(4n\eta_1\mp\eta_3)v]}{\mathrm{snh}[w+(4n\eta_1\mp\eta_3)v]\mp 2li\sqrt{k}}\,i,$$

гдѣ во всѣхъ трехъ послѣднихъ равенствахъ знаки у радикаловъ $\sqrt{4kl^2-1}$ и $\sqrt{k}$ должно брать сообразно съ точнымъ опредѣленіемъ аргумента v, который до сихъ поръ былъ здѣсь опредѣленъ только тѣмъ, что $\wp\ (v)=\bar{e}_4$ и дѣйствит. его часть равна ω_1, что всегда возможно.

Изъ написанныхъ соотношеній получаемъ:

$$\frac{p+\frac{1}{2l}}{q}=-i\,\frac{\sqrt{4kl^2-1}}{2l\sqrt{k}}\,\mathrm{tgh}[w+(4n\eta_1\mp\eta_3)v].\,^{1)}\qquad(56)$$

Если написать выраженіе $w+(4n\eta_1\mp\eta_3)v$ въ раскрытой формѣ, т.-е. съ замѣной w его величиной для разсматриваемаго момента, то будемъ имѣть:

$$\mathrm{w}+(4n\eta_1\mp\eta_3)v=-(\mp\tau_0+4n\omega_1)\zeta(v)+\frac{i\pi}{2}\pm\eta_3 v+\frac{1}{2}\Big\{lg\sigma_3(v\mp\tau_0)-$$

$$-lg\sigma_3(v\pm\tau_0)\Big\}+(4n\eta_1\mp\eta_3)v=\frac{i\pi}{2}+4n(\eta_1 v-\omega_1\zeta v)+\frac{1}{2}\int_0^{\tau_0}\Big\{\zeta[\pm(\omega_3-$$

$$-\tau_0)+v]-\zeta[\pm(\omega_3-\tau_0)-v]-2\zeta v\Big\}(\mp d\tau_0)=\frac{i\pi}{2}+4n(\eta_1 v-\omega_1\zeta v)+$$

$$+\frac{1}{2}\wp'(v)\int_0^{\tau_0}\frac{(\mp d\tau_0)}{\wp(v)-\wp(\omega_3-\tau_0)},\qquad(56')$$

на основаніи теоремы о сложеніи для функцій ζ.

---

1) Если $\sqrt{e_3}=-|\sqrt{e_3}|$, то знакъ передъ второй частью формулы (56) будетъ $+$.

Если положить $v=\omega_1+\bar{v}$, то $\bar{v}$ будетъ здѣсь чисто мнимое количество, такое что $\wp(\bar{v})$ дѣйствительно, а $\wp'(\bar{v})$ чисто мнимо[1]).

На основаніи той же теоремы о сложеніи ζ будемъ имѣть

$$\eta_1 v-\omega_1\zeta v=\eta_1\omega_1-\omega_1\zeta\omega_1+\eta_1\bar{v}-\omega_1\zeta\bar{v}+\frac{\omega_1}{2}\frac{\wp'(\bar{v})}{e_1-\wp(\bar{v})}=\eta_1\bar{v}-\omega_1\zeta\bar{v}+$$

$$+\frac{\omega_1}{2}\frac{\wp'(\bar{v})}{e_1-\wp(\bar{v})},$$

т. е. $\eta_1 v-\omega_1\zeta v$ будетъ въ данномъ случаѣ чисто мнимо, ибо $\zeta\bar{v}$ таково по свойству функцій ζ, а остальныя слагаемыя во 2-ой части по указанному выше свойству аргумента $\bar{v}$.

Такъ какъ интегралъ въ формулѣ (56′), очевидно, дѣйствителенъ, то все выраженіе $w+(4n\eta_1\mp\eta_3)v$ будетъ чисто мнимо.

Отсюда $w+(4n\eta_1\mp\eta_3)v=\bar{\varepsilon}i$,

гдѣ $\bar{\varepsilon}$ есть нѣкоторая дѣйствительная величина,

и
$$\frac{p+\frac{1}{2l}}{q}=\frac{\sqrt{4kl^2-1}}{2l\sqrt{k}}\operatorname{tg}\bar{\varepsilon}. \tag{57}$$

Если также обозначить $4(\eta_1 v-\omega_1\zeta v)$ черезъ ia, то на основаніи извѣстной[2]) теоремы Якоби можемъ заключить, что при a несоизмѣримымъ съ π любой уголъ ε можетъ быть съ произвольной точностью представленъ въ видѣ:

$$2\pi m_1+m_2a=\varepsilon,$$

---

[1]) Такъ какъ $\wp(v)$ здѣсь дѣйствительно $(=\frac{2}{3}\Delta-2l^2)$, $\wp'(v)$ чисто мнимо (ибо $e_3<2l^2<e_1$) и, какъ извѣстно, $\wp(v)=\wp(\omega_1+\bar{v})=\bar{e}_1+$ $+\frac{(\bar{e}_1-\bar{e}_2)(\bar{e}_1-\bar{e}_3)}{\wp(\bar{v})-\bar{e}_1}$, $\wp'(v-\omega_1)=\wp'(\bar{v})=\frac{6\bar{e}_1{}^2-g_2}{2(\wp(v)-e_1)}\wp'(v)$ (на основаніи теоремы сложенія для функцій $\wp'(u)$), то $\wp(v)$ и $\wp(\bar{v})$ оба дѣйствительны, а $\wp'(v)$ и $\wp'(\bar{v})$ чисто мнимы.

[2]) Jacobi. Gesammelte Werke. Bd. II. De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis. См. также C. L. Charlier. Die Mechanik des Himmels. Bd. I, Abschnitt 2, § 3.

гдѣ m_1 и m_2 суть цѣлыя числа, надлежащимъ образомъ подобранныя.

Отсюда видно, что въ движенiи типа $(2b)$ *точка* Ω_1 *послѣ достаточнаго числа оборотовъ можетъ занять въ моментъ вертикальности оси* (r) *положенiе на кругѣ* $x_1x_2=k$ *произвольно близкое къ любой точкѣ этого круга*, ибо тангенсъ угла $\bar{\varepsilon}$ можетъ по предыдущему получить значенiе, произвольно близкое къ тангенсу любого угла ε, что въ силу равенства (57) обезпечиваетъ возможность любого положенiя и точкѣ Ω_1.

Такъ какъ положенiя точки Ω_1 въ разсматриваемые моменты на кругѣ $x_1x_2=k$ можно принимать (при данныхъ k и l) за начальныя обстоятельства движенiя и такъ какъ въ силу закона непрерывности произвольно малыя разницы въ началѣ способны обезпечить въ теченiе любого напередъ заданнаго времени любую напередъ заданную степень близости движенiй, то можно сказать, что точка Ω_1, начавъ движенiе при какомъ-угодно начальномъ положенiи въ области дѣйствительныхъ движенiй типа $(2b)$, будетъ въ теченiе достаточно большаго промежутка времени произвольно большое число разъ и произвольно близко проходить около каждой точки этой области.

Наблюдателю здѣсь будетъ казаться, что точкой Ω_1 описывается не одна отдѣльная кривая линiя, но цѣлая площадь, и что при своемъ движенiи эта точка обнаруживаетъ такую свободу въ выборѣ для себя мѣста, которая не совмѣстима съ обычнымъ представленiемъ о движенiи, подчиняющемся строго-математическому закону.

Точно также другимъ страннымъ проявленiемъ своеобразiя математическихъ законовъ даннаго случая будетъ то, что движенья, начатыя, казалось бы, при самыхъ различныхъ (но при дан. k и l) начальныхъ (въ моментъ вертикальности оси (r)) положенiяхъ точки Ω_1 по отношенiю къ осямъ p и q, будутъ имѣть внутри себя произвольно длинные, хотя не одинаково орiентированные по отношенiю начальнаго момента, промежутки времени, когда такiя движенiя будутъ почти не различимы.

Даже въ одномъ и томъ же движеніи окончательно, казалось бы, установившійся характеръ траэкторіи можетъ въ концѣ нѣкотораго непрерывнаго процесса совершенно измѣниться и держаться въ такомъ измѣненномъ видѣ довольно долгое время, пока медленно нарастающія разницы снова не сдѣлаются замѣтными.

Послѣднее замѣчаніе будетъ яснѣе, если я еще разъ поясню его на формулѣ (57).

Если, допустивъ для простоты разсужденія $m_2=1$, мы будемъ имѣть нѣкоторый уголъ ε, опредѣленный равенствомъ:

$$2\pi m_1+a=\varepsilon,$$

то, если этотъ уголъ достаточно малъ и если измѣненіе угла $\bar{\varepsilon}$, которое будетъ внесено въ него въ теченіе одного оборота гироскопа $(4\omega_1\sqrt{2})$, равно этому ε, мы можемъ считать измѣненіе, внесенное въ два послѣдовательныхъ оборота, равнымъ 2ε и т. д. Пока эти измѣненія будутъ малы, что можетъ при малости ε длиться весьма долго, мы можемъ считать положенье точки Ω_1 на окружности $x_1x_2=k$ въ моменты вертикальности оси (r) почти одинаковыми, а, слѣдовательно, въ зависимости отъ этого и характеръ траэкторіи точки Ω_1 почти незыблемымъ. Но пройдетъ достаточно времени, эти разности, накопляясь, перенесутъ точку Ω_1 совсѣмъ въ другое мѣсто круга, и уже тамъ мы будемъ наблюдать какъ бы новую стойко держащуюся траэкторію точки Ω_1.

Этимъ я закончу свою работу по отношенію къ движеньямъ 2-го класса и перейду къ слѣдующему разряду простѣйшихъ движеній, лишь отмѣтивъ въ заключенье двѣ небольшихъ, но не безъинтересныхъ подробности движеній типа (2*b*), которыя я раньше обошелъ молчаньемъ.

Это 1) возможность съ помощью формулы (57) довольно простого геометрическаго построенія для угла $\bar{\varepsilon}$ и 2) *существованіе строго-періодическихъ движеній типа (2b), соотвѣтствующихъ случаю, когда количество a будетъ соизмѣримо съ π.*

Эти послѣднія движенія уже не будутъ подчиняться данной въ настоящемъ § характеристикѣ, но здѣсь всюду будетъ царить такой же всѣмъ намъ привычный порядокъ, какой для остальныхъ движенiй типа (2*b*) проявляется почти только въ перiодическихъ занятiяхъ осью (*r*) вертикальнаго положенья.

Только закономѣрность эта будетъ сравнительно мало бросаться въ глаза, даже если бы намъ удалось осуществить какую-либо изъ такихъ формъ движенья, по причинѣ вообще довольно значительной продолжительности перiода.

ГЛАВА III.

Нѣкоторыя свойства движеній 3-го класса. Зависимость ихъ отъ времени.

§ 1. Согласно сказанному въ началѣ настоящей статьи я займусь сейчасъ нѣкоторымъ дополненіемъ и даже (см. § 2а) въ одномъ мѣстѣ (ср. стр. 331, строчки 3—10 сверху ст. 1; въ отд. оттск. стр. 70) исправленіемъ характеристики типовъ движеній 3-го класса, сжато сдѣланной въ ст. 1 (см. тамъ гл. IV).

Съ этой цѣлью я разобью изучаемыя движенія на нѣсколько разрядовъ.

Прежде всего на движенія, при которыхъ удовлетворяется условіе [1])

A), если $e_4—2p_0^2>0$ (см. равенства (29)) и

B), если $e_4—2p_0^2<0$.

И въ томъ и въ другомъ случаѣ *для дѣйствительности хотя бы только исключительныхъ движеній 1-го рода*, опредѣляемыхъ диф. ур-іями задачи о гироскопѣ С. В. К., *необходимо и достаточно, чтобы* $e_5—2p_0^2\geq0$ (*C*), *что необходимо и для дѣйствительности всякихъ вообще движеній 3-го класса* (см. § 2 гл. IV ст. 1). *Это условіе мы всюду дальше будемъ предполагать соблюденнымъ.*

Въ случаѣ (*A*) всѣ соотвѣтствующія исключительныя движенія 1-го рода будутъ таковы, что ось (*r*) въ нихъ никогда не будетъ горизонтальна (см. доказательство теоремы IV), а

---

[1] Въ случаѣ $e_4=2p_0^2$ мы имѣемъ дѣло съ переходной отъ 2-го къ 3-му классу формой $(1=k+l^2)$.

при условіи (B) ось (r) въ подобныхъ движеніяхъ будетъ періодически горизонтальной.

Не трудно замѣтить, что при соблюденіи условія (C) *кратный корень* $e_\alpha=-\frac{l}{p_0}$ *въ случаѣ* (A) *можетъ заключаться въ предѣлахъ* $\left(-\frac{l}{p_0}\right)>1$, *а въ случаѣ* ($B$) *въ предѣлахъ* $1>\left(-\frac{l}{p_0}\right)>-1$.

Отсюда слѣдуетъ *въ силу 1-го изъ неравенствъ* (9), *что всѣ простѣйшія движенія 3-го класса при условіи* (A)[1] *будутъ дѣйствительны, а въ случаѣ* (B) *другія простѣйшія движенія, кромѣ исключительныхъ 1-го рода, будутъ возможны только, если* $\left(-\frac{l}{p_0}\right)>0$ (*иначе* $1+p_0^4>k^2$)[2].

Прежде чѣмъ перейти къ разсмотрѣнію такихъ не особо-замѣчательныхъ движеній, я считаю не безполезнымъ сдѣлать нѣсколько дополнительныхъ замѣчаній объ исключительныхъ движеніяхъ 1-го рода, затронувъ ту сторону дѣла, которой я не касался въ своей первой работѣ при изученіи тамъ подобныхъ движеній. Именно я коснусь вопроса объ отношеніи исключительныхъ движеній 1-го рода къ движеніямъ типа Лагранжа-Пуассона. Какъ извѣстно, оказывается, что, если наряду съ гироскопомъ С. В. Ковалевской разсматривать нѣкоторый гироскопъ съ прежними моментами инерціи $A=2C$, осью подвѣса, направленной по прежней оси подвѣса (p) такъ, что положенія центровъ тяжести для обоихъ гироскоповъ (и ихъ массы) будутъ одинаковы, то движенія разсматриваемаго вида будутъ одинаково возможны для обоихъ гироскоповъ, каковъ бы ни былъ моментъ инерціи B у второго гироскопа.

Чтобы этотъ второй гироскопъ могъ быть гироскопомъ Лагранжа[3], необходимо, чтобы для него $B=C$, но тогда

---

[1] И при непремѣнномъ соблюденіи условія (C), какъ это будетъ предполагаться въ подобныхъ случаяхъ постоянно.

[2] Если $p_0=0$, то при $l_1\leq 0$ нѣтъ не исключит. движеній (см. § 2 гл. IV ст. I).

[3] Этотъ гироскопъ Лагранжа отличается отъ подобнаго же гироскопа, упоминаемаго въ концѣ § 5а предыдущей главы. Тамъ гироскопъ Ла-

легко обнаружить въ силу извѣстныхъ неравенствъ, существующихъ между моментами инерціи каждаго тѣла съ положительною плотностью, что подобный гироскопъ Лагранжа при условіи $x_0 \neq 0$ не можетъ быть реализованъ.

Т. о. мы имѣемъ слѣдующую теорему:

Теорема XXVII. *Не существуетъ дѣйствительнаго гироскопа Лагранжа, способнаго осуществлять исключительныя движенія 1-го рода.*

Но, если подобно обобщеннымъ движеніямъ Пуансо разсматривать движенія обобщеннаго типа Лагранжа, то можно считать доказаннымъ:

Теорема XXVIII. *Исключительныя движенія 1-го рода всегда совпадаютъ съ нѣкоторыми движеніями обобщеннаго типа Лагранжа. Подобное же справедливо и относительно всѣхъ перманент. вращеній гироскопа С. В. К., какъ входящихъ въ данный разрядъ.*

На основаніи изысканій § 2 гл. I ст. I (см. доказательство теоремы IV) мы имѣемъ далѣе слѣдующую теорему:

Теорема XXIX. *Исключительныя движенія 1-го рода въ случаѣ B совпадаютъ съ движеніями нѣкотораго обобщеннаго типа Лагранжа—Пуассона* [1].

Это очевидно изъ того, что въ моментъ горизонтальности оси (r) вся скорость гироскопа приводится къ слагающей p_0.

гранжа отличается отъ соотвѣт. гироскопа С. В. К. положеніемъ центра тяжести (на оси (r) вмѣсто (p)), здѣсь величиной момента инерціи B, равнаго въ немъ не $2C$, а просто C.

[1] Обратно по исключит. движеніямъ 1-го рода можно изучать движенія типа Пуассона.

Такимъ же путемъ, какъ изученіе всякихъ движеній гироскопа Лагранжа сводится съ помощью внесенія нѣкоторой дополнительной постоянной скорости вращенія около оси его симметріи къ изученію движеній шарообразнаго Лагранжева гироскопа, можно показать, что всякія движенія гироскопа Лагранжа Пуассоновскаго типа (начальная мгновенная ось вращенія совпадаетъ съ осью симметріи) сведутся, собственно говоря, къ исключительнымъ движеніямъ 1-го рода случая (B) + нѣкоторая постоянная скорость около оси подвѣса.

Отсюда слѣдуетъ не безъинтересное заключеніе, что все разнообразіе движеній типа Пуассона приводится, какъ къ своей основѣ, къ исключительнымъ движеніямъ 1-го рода гироскопа С. В. Ковалевской.

Изъ совпаденія, указаннаго въ 2-хъ предыдущихъ теоремахъ, слѣдуетъ возможность переносить на исключит. движенія всѣ свойства, существующія у соотвѣтст. Лагранжевыхъ движеній.

Такъ, напр., теорема V является не чѣмъ инымъ, какъ слѣдствіемъ извѣстной теоремы Дарбу для случая симметричнаго гироскопа.

Но было бы ошибочно такимъ способомъ разрѣшать вопросъ объ устойчивости, ибо смежныя движенія 2-хъ гироскоповъ не будутъ одинаковы.

Для этой послѣдней цѣли необходимо будетъ непосредственное изученіе не особо-замѣчательныхъ движеній даннаго класса, къ которому мы теперь и приступимъ. какъ это обѣщали въ началѣ параграфа.

§ 2. Если мы находимся въ случаѣ (A) и одновременно соблюдается еще условіе: a) $\left(-\frac{l}{p_0}\right)<2p_0^2$ (иначе $1<k^2+3p_0^4$) или b) $\left(-\frac{l}{p_0}\right)>e_4$, или въ случаѣ ($B$) при дополнительномъ условіи c) $2p_0^2<\left(-\frac{l}{p_0}\right)$ или d) $e_4>\left(-\frac{l}{p_0}\right)$, то, какъ было установлено въ § 2 гл. IV ст. 1, простѣйшія движенія 3-го класса будутъ асимптотически (и даже вдвойнѣ асимптотически) стремиться къ соотвѣтствующимъ исключительнымъ движеніямъ 1-го рода, конечно, при соблюденіи для случая (B) неравенства $\left(-\frac{l}{p_0}\right)>0$. Т. о. *эти исключит. дв. неустойчивы.*

Что касается характера самихъ простѣйшихъ движеній, то онъ будетъ въ данныхъ случаяхъ не совсѣмъ одинаковъ.

I) При условіи $e_4>2p_0^2>\left(-\frac{l}{p_0}\right)$ предѣломъ будетъ исключительное движеніе, для котораго всегда $s_2=-\frac{l}{p_0}$. Соотвѣтствующая сѣть кривыхъ $s=\text{const.}$ получится для этого случая изъ общей сѣти (фигура 1), если предположить, что кругъ $s_2=e_3$ стянулся въ одну точку, совпадающую съ кратной исключительной точкой 1-го рода ($f_3=f_4, p=p_0$), которая въ свою очередь будетъ тутъ лежать на кругѣ $s_1=2p_0^2$.

Такъ какъ для всѣхъ простѣйшихъ движеній s_1 можетъ здѣсь измѣняться только въ предѣлахъ $e_5 \ldots e_4$, то область дѣйствительнаго движенія будетъ заключаться или между 2-мя какъ бы концентрическими овалами $s_1=e_5$ и $s_1=e_4$, охватывающими кругъ $s_1=2p_0^2$, или между 2-мя овалами подобнаго же рода внутри этого круга.

Всѣ эти овалы сходятся въ точкѣ $(f_3=f_4)(q=0, p=p_0)$, которая собственно будетъ кратной точкой какъ для кривой $s_1=e_5$, такъ и для кривой $s_1=e_4$.

Траэкторія точки Ω_1 въ этомъ случаѣ будетъ только 1 разъ пересѣкать ось $p(s_2=-\infty)$, заключаясь вся или внутри круга $s_1=2p_0^2$, или вся внѣ между соотвѣтственными петлями указанныхъ выше оваловъ.

Точка Ω_1 будетъ асимптотически двигаться къ точкѣ

$$p=p_0, q=0,$$

постоянно колеблясь отъ овала $s_1=e_4$ къ овалу $s_1=e_5$ и обратно, при чемъ ея траэкторія будетъ касаться этихъ кривыхъ.

Если $e_\alpha=e_3$, т.-е. $-\dfrac{l}{p_0}=2p_0^2(1=k^2+3p_0^4)$, то кругъ $s_1=2p_0^2$ сведется къ исключительной точкѣ $q=0, p=p_0$. Въ этомъ случаѣ областей для движенія Ω_1 останется только одна, и кривыя $s_1=e_4$ и $s_1=e_5$ будутъ имѣть точку возврата $q=0, p=p_0$.

II) Если перейти къ случаю, когда $\left(-\dfrac{l}{p_0}\right)>e_4>2p_0^2$, то здѣсь предѣломъ будетъ исключительное движеніе: $s_1=\left(-\dfrac{l}{p_0}\right)$ постоянно.

Сѣть кривыхъ $s=\text{const.}$ получится изъ той же фигуры (1) стяженіемъ круга $s_1=e_1$ въ точку, лежащую на кругѣ $s_2=e_3$. Поле дѣйствительныхъ движеній представится сплошнымъ пространствомъ, заключеннымъ внутри овала $s_1=e_5$.

Траэкторія точки Ω_1 будетъ безконечное число разъ пересѣкать ось p вперемежку съ пересѣченіями круга $s_2=e_3=2p_0^2$, описывая подобіе спирали около асимптотической точки

$$q=0, p=p_0.$$

Она будетъ имѣть только одну точку соприкосновенія съ оваломъ: $s_1=e_5$.

III) При условіи $\left(-\frac{l}{p_0}\right)>2p_0^2>e_4$ предѣломъ будетъ исключительное движеніе: $s_1=-\frac{l}{p_0}$ постоянно. Соотвѣтствующая сѣть кривыхъ $s=\mathrm{const}$. получится здѣсь, если на фигурѣ (1) кругъ

$$s_1=e_1$$

стянется въ одну точку, совпадающую съ кратной исключительной точкой 1-го рода $(f_4=f_1)(q=0, p=p_0)$.

Вся область дѣйствительныхъ движеній будетъ лежать внутри сплошной площади, заключенной въ овалъ $s_1=e_5$: или въ части ея внѣ круга $s_2=2p_0^2$, оттграниченнной кривой $s_2=e_4$, или въ части внутри круга, оттграниченной другой вѣтвью той же кривой.

Обѣ эти области имѣютъ общую точку $q=0, p=p_0$ (кратная точка кривой $s_2=e_4$).

Траэкторія Ω_1 будетъ безконечное число разъ пересѣкать ось p вперемежку съ прикосновеніями къ кривой $s_2=e_4$, но здѣсь у нея будетъ только одно соприкосновеніе съ оваломъ $s_1=e_5$.

Точка $q=0, p=p_0$ будетъ для нея служить асимптотической точкой.

Если $-\frac{l}{p_0}=2p_0^2$, то къ этой же точкѣ сведется кругъ $s_2=2p_0^2$, такъ что областей для движенія останется только одна. Въ этомъ случаѣ точка $q=0, p=p_0$ есть точка возврата кривой $s_2=e_4$.

IV) Если $2p^2_0>e_4>-\frac{l}{p_0}$ при $-\frac{l}{p_0}>0$, то асимптотическимъ предѣломъ для простѣйшихъ движеній будетъ исключительное движеніе $s_2=-\frac{l}{p_0}$.

Кругъ $s_2=e_3$ сѣти стянется въ точку, лежащую на кругѣ $s_1=2p_0^2$. Полемъ дѣйствительныхъ движенiй будетъ вся площадь внутри внѣшняго овала $s_1=e_5$, но внѣ внутренняго, которые оба въ сущности составляютъ здѣсь 2 петли одной кривой $s_1=e_5$, имѣющей кратную точку $q=0, p=p_0$.

Траэкторiя Ω_1 одинъ разъ только пересѣкаетъ ось p, но безконечное число разъ кругъ $s_1=2p_0^2$, переходя отъ соприкосновенiя съ внѣшнимъ къ соприкосновенiю съ внутреннимъ оваломъ $s_1=e_5$.

При этомъ она будетъ, очевидно, асимптотически стремиться къ исключительной точкѣ $q=0$, $p=p_0$.

Если же $\left(-\dfrac{l}{p_0}\right)\leq 0$, то будутъ существовать только одни исключит. движенiя 1-го рода. Въ этомъ случаѣ сѣть кривыхъ $s=$const. получится изъ сѣти фигуры (1), если точки f_1 и f_2 сольются.

При небольшомъ измѣненiи имѣющихъ мѣсто въ этомъ послѣднемъ случаѣ начальныхъ условiй движенiя, точки f_1 и f_2 будутъ лежать, хотя и близко другъ къ другу, но не слитно, и 2 корня ур-iя $\varphi(s)=0$ будутъ отличаться на нѣкоторую малую комплексную величину.

Соотвѣтствующая такому измѣненному движенiю сѣть кривыхъ s будетъ подобна фигурѣ (2), и разсмотрѣнiе ея *легко обнаружитъ неустойчивость разсматриваемаго типа исключительныхъ движенiй 1-го рода, который можетъ считаться устойчивымъ только въ смыслѣ Пуассона, т.-е. въ смыслѣ прохожденiя точки Ω_1 безконечное число разъ въ смежности съ исключительной точкой.*

§ 2a. V) Въ случаѣ, когда $e_4>\left(-\dfrac{l}{p_0}\right)>2p_0^2$, отношенiе не особо замѣчательныхъ простѣйшихъ движенiй и соотвѣт. исключительныхъ будетъ отлично отъ установленнаго въ предыдущемъ §. Здѣсь будутъ, правда, существовать оба эти вида движенiй, но они будутъ стоять, т.-с., изолированно другъ отъ друга.

Чтобы лучше понять положенiе дѣлъ, мы разсмотримъ сначала смежное движеніе, соотвѣтствующее очень малому измѣненію начальныхъ обстоятельствъ даннаго случая.

1) Предположимъ сперва это измѣненіе такимъ, что 2 корня ур-ія $\varphi(s)=0$ будутъ близки по величинѣ и дѣйствительны.

Для такого смежнаго движенія кругъ $s_1=e_1$ (см. фигуру 1) будетъ очень малаго радіуса, но все поле возможныхъ дѣйствительныхъ движеній состоитъ изъ 2-хъ совершенно отдѣльныхъ другъ отъ друга областей: первая внѣ круга $s_1=e_1$, его кольцеобразно охватывающая и заключенная между 2-мя внѣшними овалами $s_1=e_5$ и $s_1=e_4$, вторая внутри круга $s_1=e_1$, то же заключенная между 2-мя внутренними овалами

$$s_1=e_4$$

и

$$s_1=e_5.$$

Въ предѣлѣ, при сліяніи 2 корней ур-ія $\varphi(s)=0$, для движеній 3-го класса сохранится одна внѣшняя область, а внутренняя обратится въ исключительную точку $(q=0, p=p_0)$, для которой значеніе $s_1=e_1$, ибо таковъ предѣлъ для s, откуда бы *ни подходить къ данной исключительной точкѣ*. Эта точка будетъ при томъ совершенно изолирована отъ внѣшней области, которая и будетъ, собственно, ареной всѣхъ простѣйшихъ не особо-замѣчательныхъ движеній даннаго случая.

При этихъ движеніяхъ траэкторія Ω_1 будетъ безконечное число разъ пересѣкать по очереди ось p и кругъ $s_2=2p_0^2$, дѣлая спиралеобразные обходы съ постоянными колебаніями отъ овала $s_1=e_5$ къ овалу $s_1=e_4$.

2) Если предположить, что 2 корня ур-ія $\varphi(s)=0$ для смежнаго движенія будутъ оба комплексны съ очень малой мнимой частью, то разсмотрѣніе сѣти на фигурѣ (2) позволитъ по предыдущему заключить, что вся область дѣйствительныхъ, смежныхъ съ этой стороны, движеній будетъ ограничена тѣмъ, что мы назвали выше внѣшней областью между 2-мя овалами $s_1=e_4$ и $s_1=e_5$. Внутренней области въ такомъ случаѣ нѣтъ.

Такимъ образомъ при маломъ измѣненіи начальныхъ обстоятельствъ какого-либо не особо замѣчательнаго движенія даннаго типа область, внутри которой оно можетъ происходить, измѣнится весьма мало, и движеніе приблизительно сохранитъ свой типъ.

Тоже будетъ здѣсь, если немного измѣнятся начальныя условія для соотвѣтствующаго исключительнаго движенія 1-го рода, такъ какъ область, гдѣ оно тогда будетъ возможно, захватитъ лишь небольшую площадку около точки $q=0$, $p=p_0$.

Слѣдовательно, *соотвѣтствующій данному случаю типъ исключительнаго движенія 1-го рода можетъ быть названъ устойчивымъ въ томъ же приблизительно смыслѣ, какъ, напр., движенія 1-го класса и т. п.*

Въ немъ все время будутъ удерживаться всѣ основныя его черты лишь съ ничтожными отступленіями (см. § 2 гл. I ст. 1).

Въ періодъ увеличенія вертикальности оси (r) будетъ увеличиваться скорость вращенья гироскопа и одновременно (въ силу равенства $\gamma=\frac{l}{p_0}+\frac{r^2}{2}$*) понижаться центръ его тяжести. Въ періодъ уменьшенія вертикальности оси (r) будетъ наоборотъ.*

Ось (r) при этомъ не становится ни вертикально, ни горизонтально, и центръ тяжести все время находится надъ горизонтомъ опоры.

Только самыя фазы движенія, первоначальнаго и нѣсколько измѣненнаго, будутъ все болѣе расходиться отъ накопленія небольшихъ разницъ во времени.

VI) Въ остающемся еще случаѣ, когда

$$2p^2_0>\left(-\frac{l}{p_0}\right)>e_4,\ \left(-\frac{l}{p_0}\right)>0,$$

тоже будутъ существовать и особо-замѣчательныя (исключит. 1-го рода) и обыкновенныя простѣйшія движенія.

Но и тутъ первыя не будутъ предѣломъ для вторыхъ, хотя по временамъ точка Ω_1 при послѣднихъ движеніяхъ подходитъ сколь угодно близко къ исключительной точкѣ $q=0$, $p=p_0$.

Въ этомъ случаѣ соотвѣтствующія исключительныя движенія какъ бы обладаютъ устойчивостью въ смыслѣ Пуассона, являясь неустойчивыми въ обыкновенномъ смыслѣ.

Дѣйствительно, кругъ $s_2=e_3$ въ сѣти кривыхъ $s=\text{const.}$ стянется здѣсь въ одну точку на кругѣ $s_1=2p_0{}^2$, и вся площадь, открытая для дѣйствительныхъ движеній, будетъ заключаться (см. фигуру 1) между двумя овалами $s_1=e_5$ внѣ и внутри круга $s_1=2p_0{}^2$ съ общей кратной точкой $q=0$, $p=p_0$.

Площадь эта будетъ открыта не вся, но за исключеніемъ своей части, отрѣзанной другой кривой $s_2=e_4$, проходящей черезъ ту же точку $q=0$, $p=p_0$ и отсѣкающей часть внѣшняго овала.

Траэкторія Ω_1 безконечное число разъ пересѣкаетъ ось p, въ промежуткахъ непремѣнно касаясь кривой $s_2=e_4$; она также будетъ поочереди касаться то того, то другого изъ оваловъ $s_1=e_5$, пересѣкая въ промежуткахъ окружность $s_1=2p_0{}^2$.

Точки прикосновенія траэкторіи съ кривыми $s_1=e_5$ и $s_2=e_4$ могутъ по временамъ лежать очень близко къ исключительной точкѣ, но никогда не попадутъ въ нее ни въ безконечное время, ибо здѣсь нѣтъ асимптотизма, ни въ конечное, ибо тогда по свойству исключительныхъ движеній 1-го рода всегда должно бы было существовать движеніе этого послѣдняго вида.

Если $2p_0{}^2>\left(-\frac{l}{p_0}\right)>e_4$, но $-\frac{l}{p_0}\leq 0$, то *существуютъ только одни исключит. движенія, о которыхъ можно сказать аналогичное сказанному въ § 2 о случаѣ IV.*

§ 3. Теперь я постараюсь выразить въ зависимости отъ времени всѣ величины (кромѣ прецессіи), характеризующія движенія 3-го класса, съ цѣлью еще нѣсколько болѣе выяснить управляющіе ими законы.

Для этого намъ будетъ необходимо, какъ я указалъ еще въ § 1 гл. IV ст. 1, внести въ общія формулы г-жи Ковалевской нѣкоторыя видоизмѣненія, которыя сдѣлаютъ возможными и опредѣленными всѣ операціи и для случая равенства 2-хъ корней ур-ія $\varphi(s)=0$.

Видоизмѣненія эти мы внесемъ обычнымъ путемъ разсмотрѣнія случая кратности корней, какъ случая предѣльнаго.

Очевидно, что при этомъ въ числителяхъ и знаменателяхъ, составленныхъ для $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ [1]) выраженій черезъ s, всѣ члены, которые соотвѣтствуютъ не кратному корню ур-ія $\varphi(s)=0$, а также по одному члену для кратнаго корня останутся безъ измѣненія, но вторые члены, соотвѣтствующіе кратному корню, измѣнятся.

Именно, если мы обозначимъ одинъ изъ слившихся корней черезъ e_α, а другой $e_\gamma=\lim\limits_{\varepsilon=0}(e_\alpha+\varepsilon)$ и не кратный корень черезъ e_β, то, замѣнивъ предварительно всюду множители $\frac{1}{\varphi'(e_\alpha)}$ и т. п. черезъ пропорціональные имъ факторы: $e_\beta-e_\gamma$, $e_\gamma-e_\alpha$, $e_\alpha-e_\beta$, а $\sqrt{e_\alpha}, \sqrt{e_\beta}, \sqrt{e_\gamma}$ черезъ равныя имъ (по условію (44)) величины $\frac{l\sqrt{2}}{\sqrt{e_\beta}\sqrt{e_\gamma}}$ и т. д., легко найдемъ для $p, q, \ldots \gamma''$ слѣдующія формулы (въ предположеніи $e_\alpha\neq e_\beta$): [2])

$$p=-\frac{[\sqrt{e_\alpha}(e_\alpha-e_\beta)]'\sqrt{e_\beta}P_\alpha-\sqrt{e_\alpha}(e_\alpha-e_\beta)\sqrt{e_\beta}[P]'-e_\alpha P_\beta}{2l\left\{\left[\frac{e_\alpha-e_\beta}{\sqrt{e_\alpha}}\right]'\frac{1}{\sqrt{e_\alpha}}P_\alpha-\frac{e_\alpha-e_\beta}{\sqrt{e_\alpha}\sqrt{e_\beta}}[P_\alpha]'-\frac{1}{e_\alpha}P_\beta\right\}},$$

$$q=\frac{-i(e_\alpha-e_\beta)^2}{2l\left\{\left[\frac{e_\alpha-e_\beta}{\sqrt{e_\alpha}}\right]'\frac{1}{\sqrt{e_\beta}}P_\alpha-\frac{e_\alpha-e_\beta}{\sqrt{e_\alpha}\sqrt{e_\beta}}[P_\alpha]'-\frac{1}{e_\alpha}P_\beta\right\}},$$

$$r=\sqrt{2}\,\frac{\left[\frac{e_\alpha-e_\beta}{\sqrt{e_\alpha}}\right]'\frac{1}{\sqrt{e_\beta}}P_{\alpha\beta}-\frac{e_\alpha-e_\beta}{\sqrt{e_\alpha}\sqrt{e_\beta}}[P_{\alpha\beta}]'-\frac{1}{e_\alpha}P_{\gamma\alpha}}{\left[\frac{e_\alpha-e_\beta}{\sqrt{e_\alpha}}\right]'\frac{1}{\sqrt{e_\beta}}P_\alpha-\frac{e_\alpha-e_\beta}{\sqrt{e_\alpha}\sqrt{e_\beta}}[P_\alpha]'-\frac{1}{e_\alpha}P_\beta}, \tag{58}$$

$$\gamma''=\frac{1}{l\sqrt{2}}\,\frac{[\sqrt{e_\alpha}(e_\alpha-e_\beta)]'\sqrt{e_\beta}P_{\alpha\beta}-\sqrt{e_\alpha}(e_\alpha-e_\beta)\sqrt{e_\beta}[P_{\alpha\beta}]'-e_\alpha P_{\alpha\alpha}}{\left[\frac{e_\alpha-e_\beta}{\sqrt{e_\alpha}}\right]'\frac{1}{\sqrt{e_\beta}}P_\alpha-\frac{e_\alpha-e_\beta}{\sqrt{e_\alpha}\sqrt{e_\beta}}[P_\alpha]'-\frac{1}{e_\alpha}P_\beta},$$

---

[1]) См. § 4 гл. II.

[2]) Случай $e_\alpha=e_\beta$ требуетъ новаго перехода къ предѣлу, чего мы за простотой этого пріема и слишкомъ частнымъ характеромъ соотвѣт. движенія не будемъ выполнять въ подробностяхъ.

$$\gamma\pm i\gamma'=\frac{\left|\frac{e_\alpha-e_\beta}{\sqrt{e_\alpha}}\left(\frac{2l^2}{e_\alpha e_\beta}-e_4\right)\right|'\frac{1}{\sqrt{e_\beta}}P_{\alpha 4}-\frac{e_\alpha-e_\beta}{\sqrt{e_\alpha}\sqrt{e_\beta}}\left(\frac{2l^2}{e_\alpha e_\beta}-e_4\right)[P_{\alpha 4}]'-\frac{1}{e_\alpha}(e_\beta-e_4)P_{\beta 4}\mp[\;]'\frac{1}{\sqrt{e_\beta}}P_{\alpha 5}-\ldots}{\left|\frac{e_\alpha-e_\beta}{\sqrt{e_\alpha}}\right|'\frac{1}{\sqrt{e_\beta}}P_{\alpha 4}-\frac{e_\alpha-e_\beta}{\sqrt{e_\alpha}\sqrt{e_\beta}}[P_{\alpha 4}]'-\frac{1}{e_\alpha}P_{\beta 4}\mp\left|\frac{e_\alpha-e_\beta}{\sqrt{e_\alpha}}\right|'\frac{1}{\sqrt{e_\beta}}P_{\alpha 5}\pm\ldots},$$

гдѣ знакъ $[\quad]'$ означаетъ производную по e_α отъ заключеннаго въ скобки выраженія, точки въ концѣ числителя и знаменателя въ послѣдней формулѣ поставлены для краткости взамѣнъ членовъ, аналогичныхъ уже проставленнымъ явно, но съ замѣной индекса 4 на 5, а $\sqrt{e_\beta}$ при окончательномъ подсчетѣ должно замѣнить черезъ $\frac{l\sqrt{2}}{e_\alpha}$ въ силу условія (44).

Такъ какъ диф. ур—ія задачи приведутся для движеній даннаго класса къ виду:

$$\frac{ds_1}{\sqrt{(e_5-s_1)(s_1-e_1)(s_1-e_\beta)}}+\frac{ds_2}{\sqrt{(e_5-s_2)(s_2-e_4)(s_2-e_\beta)}}=-\sqrt{2}dt,$$

$$\frac{ds_1}{(s_1-e_\alpha)\sqrt{(e_5-s_1)(s_1-e_4)(s_1-e_\beta)}}+\frac{ds_2}{(s_1-e_\alpha)\sqrt{(e_5-s_2)(s_2-e_4)(s_2-e_\beta)}}=0, \tag{59}$$

гдѣ всѣ корни e_α, e_β, θ_4, e_5 дѣйствительны и согласно выводамъ моей 1-ой работы удовлетворяютъ по введеніи вспомогательной величины p_0 равенствамъ (29), обращаясь для $p_0=$ $=l\dot{-}o=e_\beta=k-1$ въ $e_\alpha=3l_1$, $e_5=3l_1+1$, $e_4=3l_1-1$, то, если положить въ системѣ ур—ій (30):

$$g_2=4\left[e_\beta^2-\frac{1}{3}(e_5+e_4+e_\beta)(e_5+e_4)+e_4e_5\right],$$

$$g_3=-\frac{4}{27}(e_4+e_\beta-2e_5)(e_5+e_4-2e_\beta)(e_\beta+e_5-2e_4),$$

$$\bar{e}_4=\frac{e_5+e_4+e_\beta}{3}-e_\alpha,$$

$$\bar{e}_\lambda + e_a = \frac{e_5 + e_4 + e_\beta}{3}, \quad s - e_a = -(z - \bar{e}_\lambda); \ \sqrt{s - e_a} = i\sqrt{z - \bar{e}_\lambda},$$

$$d\tau_1 = -\frac{dt}{\sqrt{2}}, \quad d\tau_2 = 0,$$

и тутъ можно пользоваться [1]) функціями Z для вычисленія P, соотвѣтствующихъ данному случаю.

Именно мы будемъ имѣть:

$$u = \frac{t_0 - t}{\sqrt{2}}, \quad w = -\frac{t}{\sqrt{2}}\zeta(v) + w_0$$

и
$$P_a = -Z_\lambda, \quad P_{a,b} = -iZ_{\lambda,\mu},$$

гдѣ индексы a и λ (b и μ) соотвѣтствуютъ другъ другу согласно слѣдующимъ равенствамъ:

При условіи (A) $e_4 - 2p_0^2 > 0$, $\bar{e}_1 + e_\beta = \bar{e}_2 + e_4 = \bar{e}_3 + e_5 = \bar{e}_4 + e_\alpha$, [2]) если же ($B$) $e_4 - 2p_0^2 < 0$, то $\bar{e}_1 + e_4 = \bar{e}_2 + e_\beta = \bar{e}_3 + e_5 = \bar{e}_4 + e_\alpha$.

Но здѣсь въ отличіе отъ вычисленій главы II остается еще опредѣлить въ функціи времени выраженія:

$$[P_\alpha]', \ [P_{\alpha\beta}]', \ [P_{\alpha 4}]', \ [P_{\alpha 5}]'.$$

Какъ легко убѣдиться, все дѣло сведется собственно къ вычисленію выраженія $[P_\alpha]'$, такъ какъ

$$(\delta = \beta, 4, 5) \ [P_{\alpha\delta}]' = P_{\alpha\delta}[P_\alpha]'\frac{1}{P_\alpha}.$$

---

[1]) Должно замѣтить, что, если $e_\alpha = e_\beta$ или $e_\alpha = e_4$, то самыя выраженія для Z должны быть видоизмѣнены по способу перехода къ предѣлу, что однако и здѣсь мы не будемъ продѣлывать въ подробности, ограничившись этимъ указаніемъ.

Случай $e_\alpha = e_4$ (иначе $p_0^2 = k$, или $1 = 4kl^2$) есть случай переходный ко 2-му классу.

[2]) Если $e_4 = 2p_0^2$, то мы имѣемъ дѣло, какъ отмѣчено еще въ § 1, съ переходнымъ ко 2-му классу случаемъ ($l^2 + k = 1$) асимптот. къ перманентнымъ вращеніямъ движеній; рѣшеніе задачи во времени дано еще въ моей 1-ой статьѣ (см. § 2 гл. IV).

Изъ равенства:

$$P_\alpha=\sqrt{(s_1-e_\alpha)(s_2-e_\alpha)} \text{ слѣдуетъ, что } [P_\alpha]'=\frac{s_1+s_2-2e_\alpha}{2P_\alpha}.$$

Но такъ какъ $P_\alpha^2=Z_4^2=(s_1-e_\alpha)(s_2-e_\alpha)$

и $P_5^2=Z_3^2=(s_1-e_5)(s_2-e_5)$,

то $$s_1+s_2-2e_\alpha=e_5-e_\alpha+\frac{Z_4^2-Z_3^2}{e_5-e_\alpha}.$$

Такимъ образомъ все вычисленіе можно считать законченнымъ.

Особо-замѣчательныя движенія и здѣсь соотвѣтствуютъ безконечному значенію w_0.

Эти движенія, какъ уже намъ извѣстно, будутъ исключит. 1-го рода; что можно было бы вывести и изъ нашихъ формулъ, ибо при $w_0=\infty$ имѣемъ все время движенія $q=0$.

Также дѣлается очевидной и обратная теорема (IXa ст. 1), такъ какъ изъ выведенныхъ формулъ послѣ упрощенія ихъ слѣдуетъ, что выраженіе для q будетъ имѣть числителемъ:

$$-i(e_\alpha-e_3)^2\sigma(u)\left[e^{w}\sigma(u-v)+e^{-w}\sigma(u+v)\right]$$

при знаменателѣ—голоморфной функціи относительно u и цѣлой 2-ой степени относительно e^{w} и e^{-w}.

Слѣдовательно, если $e_\alpha \neq e_3$, то q можетъ быть постоянно O только при $w_0=\pm\infty$, т.-е. въ особо-замѣчательномъ случаѣ. Тогда $p=p_0$ постоянно.

Для случая $e_\alpha=e_3$ подобное заключеніе [1]) получается при предѣльномъ разсмотрѣніи, какъ и для случая $e_\alpha=e_4$.

Изъ выраженій числителей для количества q, $p-p_0$, $-\frac{l}{e_\alpha}r+\gamma''$ также нетрудно убѣдиться, что кромѣ моментовъ непеpіодическаго характера, когда то или другое изъ этихъ количествъ

---

[1]) Въ случаѣ $e_3=e_4$ (иначе $e_4=2p_0^2$) нужное заключеніе получится изъ даннаго еще въ ст. 1 рѣшенія задачи для этого типа переходныхъ движеній.

обращается въ 0, существовали бы періодическія обращенія въ 0 всѣхъ 3 хъ, если бы ур—іе $\sigma(u)=0$ могло имѣть дѣйствительные по отношенію къ t корни.

Но путемъ опредѣленія постоянныхъ u_0, t_0 по начальнымъ даннымъ легко усмотрѣть, что всѣ эти послѣдніе моменты мнимы.

Такимъ образомъ проявленія періодичности въ не особо-замѣчат. движеніяхъ 3-го класса почти отсутствуютъ, если не считать возможности нѣкоторыхъ строго-періодическихъ формъ при особо-удачномъ выборѣ начальныхъ данныхъ для движеній V и VI типовъ.

§ 4. Вообще должно замѣтить, что общій характеръ двухъ послѣднихъ разрядовъ (V и VI) движеній 3-го класса нѣсколько отличается отъ характера первыхъ четырехъ. Въ извѣстномъ смыслѣ можно сказать, что здѣсь мы имѣемъ нѣчто аналогичное послѣднему (2b) разряду движеній 2-го класса.

При отсутствіи, вообще говоря, періодичности, равно какъ и асимптотизма, всѣ эти движенія обладаютъ, т. с., колебательнымъ характеромъ. Вѣтви траэкторіи точки Ω_1 заполняютъ überall dicht всю площадь возможныхъ движеній, и точка Ω_1 безконечное число разъ будетъ находиться въ произвольной близости съ любой точкой этой площади, воспроизводя произвольно долгое время съ произвольной близостью въ движеніи при однихъ начальныхъ условіяхъ фазы движенія, возникшаго совсѣмъ при другихъ начальныхъ данныхъ (но при однихъ и тѣхъ же p_0 и k), и описывая, иногда довольно продолжительное время каждую, вѣтви кривыхъ, весьма отличающіяся по виду другъ отъ друга.

Исключеніемъ будутъ только случаи строго-періодическихъ движеній, соотвѣтствующіе такимъ значеньямъ p_0 и k, что $\frac{\eta_1 v-\omega_1\zeta(v)}{i}$ соизмѣримо съ π.

Движенія эти по своимъ свойствамъ вполнѣ аналогичны періодическимъ движеніямъ, отмѣченнымъ въ § 6 главы II, отличаясь вмѣстѣ съ ними отъ періодическихъ движеній въ исключит. случаѣ 2-го рода (см. § 1 гл. III ст. 1) значительно большей продолжительностью періода по сравненію съ ω.

Всѣ эти три вида періодическихъ движеній, очевидно, неустойчивы.

На ряду съ такими особыми формами стоитъ отмѣтить еще разъ; но уже внѣ связи съ разобранными шестью типами движеній 3-го класса, два переходныхъ ко 2-му классу (2-ой группѣ) семейства движеній, которыя въ случаѣ $e_3 = e_4$ ($l^2+k=1$) отличаются особой-простотой. Случай этотъ былъ уже разобранъ въ моей первой работѣ, и движенія оказались асимптотическими къ перманентнымъ вращеніямъ около оси подвѣса.

Другая переходная форма $e_\alpha = e_4$ ($1=4kl^2$) гораздо сложнѣе. Формулы, къ ней относящіяся, являются предѣльнымъ случаемъ формулъ настоящей главы. Такъ какъ общій характеръ этихъ движеній, совмѣщающихъ въ себѣ главнѣйшія свойства движеній 2-ой группы 2-го класса (періодичность[1]) верт. положеній оси (r)) съ свойствами, указанными въ настоящей главѣ (асимптотичность къ исключит. движеніямъ 1-го рода), выясненъ въ достаточной мѣрѣ предшествующими изслѣдованіями, то я не буду на нихъ болѣе останавливаться и закончу здѣсь свою вторую работу о движеніяхъ гироскопа С. В. Ковалевской, только указавши[2]) въ заключеніе, что всѣ движенья асимптот. характера случая (B) (см. § 1) могутъ быть осуществлены болѣе или менѣе удовлетворительно, если, придавъ оси (r) горизонтальное положеніе ($\gamma''=0$), придать гироскопу любую угловую скорость p_0 около оси подвѣса, которой наклонъ къ вертикали опредѣлитъ 2-ую[3]) постоянную $\gamma = \frac{l}{p_0}\left(\frac{l}{p_0} < 0\right)$.

---

[1]) Въ случаѣ $2k>1$ ($p_0{}^2=k>l^2$) будетъ во время одного оборота наблюдаться 1 строго вертикальное положеніе оси (r) и другое, разноименное съ первымъ, достижимое лишь асимптотически; при $2k<1$ ($l^2>k=p_0{}^2$) оба подобныя положенія оси (r) будутъ одноименными.

[2]) Считаю также не безполезнымъ напомнить, что всѣ сужденія наши объ устойчивости движеній не предполагаютъ возможныхъ неточностей въ соблюденіи условій С. В. Ковалевской $y_0=z_0=0$, $A=B=2C$, вліяніе коихъ поэтому остается не принятымъ въ расчетъ.

[3]) См. доказательство теоремы IV, случай 1). Ст. 1.

Скорость p_0, имѣя въ виду различныя сопротивленія, должна быть при этомъ достаточно велика.

Тогда въ силу небольшихъ неточностей, всегда неизбѣжныхъ, получится не исключит. движеніе 1-го рода, какъ бы должно, но движеніе близкое къ соотвѣт. простѣйшимъ 3-го класса, только не строго асимптотическое, а съ возможностью, хотя и очень медленно, для перемѣнной s достигать значеній, близкихъ кратному корню, и снова отъ нихъ удаляться.

Должно однако имѣть въ виду, что въ случаѣ $0 > \frac{l}{p_0} > -\frac{1}{2p_0^2}$, *т. е.* $k > p_0^2$, *соотвѣтствующее исключительное движеніе, будучи устойчивымъ (типа VI), осуществится само съ сохраненіемъ всѣхъ своихъ особенностей: напр., періодическаго прохожденія оси (r) и центра тяжести гироскопа черезъ горизонтъ опоры и ускоренія вращенья при увеличеніи вертикальности полярной оси (и одновременномъ пониженіи ц. т.).*

Исправленіе замѣченныхъ погрѣшностей и опечатокъ въ статьѣ:

„ПРОСТѢЙШІЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНІЯ ТЯЖЕЛАГО НЕСИМ. ГИРОСКОПА С. В. КОВАЛЕВСКОЙ“.

Статья первая.

Стр.	*Стр. св.*	*Напечатано.*	*Должно быть.*
1	20	XIV	XII.
1	8	$x_0 10$	$x_0 \neq 0$
2	19	∞	0
4	32	вращеній	вращеній, и немногихъ другихъ
7	12	$\frac{2l}{\sqrt{2e_\alpha}} \frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}$	$\frac{2l}{\sqrt{2e_\alpha}} \frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}$ 1)
7	24	————	1) При $e_\alpha=0$ $\frac{2l}{\sqrt{2e_\alpha}}=$ $=\sqrt{9l_1^2+1-k^2}$ въ силу ур-ія (1).
21	2	оси q.	оси q, послѣднее однако подъ условіемъ: $p_0^2+\frac{l}{p_0}>0.$
21	4	положеніе въ этотъ моментъ	положеніе
24	16	$l+\frac{\gamma''^2}{2p_0}=l+\frac{p_0}{2}r^2$	$l-\frac{\gamma''^2}{2p_0}=l-\frac{p_0}{2}r^2$
24	21	момента	главнаго момента
31	29	момента	главнаго момента
38	11	момента	главнаго момента
40	21	точку, *сим. относ. оси* p точкѣ	точку
45	24	занимать всѣ положенія	получать всѣ наклоненія
45	27	горизонтальна	горизонтальна внѣ вертикальности (r)
47	24	(25)	(20′)
47	4	устойчивыхъ движеній	устойчивыхъ о. замѣчат. движеній
50	17	$\int_{2l^2}^{-\infty} \frac{ds}{2l^2\sqrt{(\Delta-s)[s(s-\Delta)+1]}}$	$\int_{2l^2}^{-\infty} \frac{ds}{\sqrt{(\Delta-s)[s(s-\Delta)+1]}}$

Стр.	*Стр. св.*	*Напечатано.*	*Должно быть.*
56	33	l^2+k	$(l^2+k)^2$
58	10—11	$f_2 f_3 \ldots . f_2 C f_3$	$f_4 f_3 \ldots . f_4 C f_3$
62	13	$4kl^2=\frac{\Omega^2{}_0}{4}(sn 2\mu)^2.$	$4kl^2=\frac{\Omega^4{}_0}{4}(sn 2\mu)^2.$
65	18	$\left(x_1+\frac{l}{e_\alpha}\right)\left(x_1+\frac{l}{e_\alpha}\right)$	$\left(x_1+\frac{l}{e_\alpha}\right)\left(x_2+\frac{l}{e_\alpha}\right)$
69	14	$\frac{1}{2}>p_0{}^2>k;$	$1>k^2+3p_0{}^4,\ 1-k>p_0{}^2>k,$
69	18	$p_0{}^2<1<k+p_0{}^2,$	$p_0{}^2<k<1+p_0{}^2;$
71	2	e_α	e_β
5	17	измѣренія	измѣренія времени
22	30	работѣ.	работѣ: они всѣ исчерпываются указанными выше.
53	15	періодъ	полуперіодъ
63	25	долгое	долгое (относительно)

Исправленіе замѣченныхъ погрѣшностей и опечатокъ въ статьѣ:

„ПРОСТѢЙШIЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНІЯ ТЯЖЕЛАГО НЕСИМ. ГИРОСКОПА С. В. КОВАЛЕВСКОЙ“.

Статья вторая.

Стр.	*Стр. св.*	*Напечатано.*	*Должно быть.*
3	27	одного вида ихъ, устойчиваго	2-хъ видовъ ихъ, устойчивыхъ.
73	14	фигуры (1)	фигуры (2).
75	28	хотя по временамъ	и
75	29	подходитъ	не подходитъ.

75 32—33 вмѣсто словъ: «*какъ бы обладаютъ устойчивостью въ смыслѣ Пуассона, являясь неустойчивыми въ обыкновенномъ смыслѣ*». Должно быть: «*обладаютъ устойчивостью въ томъ же смыслѣ, какъ и движенія предыдущаго типа*».

Стр.	*Стр. св.*	*Напечатано.*	*Должно быть.*
76	7	проходящей	не проходящей.
76	8	внѣшняго	внѣшняго и внутренняго.

76 14—20 весь обзацъ должно замѣнить новымъ: „По соображеньямъ, близкимъ къ высказаннымъ въ случаѣ V, нетрудно убѣдиться въ справедливости сдѣланнаго выше утвержденія объ устойчивости [1]) исключительныхъ движеній и въ данномъ случаѣ“.

---

[1]) Вопросъ объ устойчивости исключит. движеній 1-го рода разрѣшенъ въ статьѣ извѣстнаго итальянскаго математика Levi-Civita: „Sui moti stazionarii di un corpo rigido nel caso della Kovalevsky (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. X, 1901), которая, къ сожалѣнію, поздно сдѣлалась мнѣ извѣстной и то по реферату въ Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (о фактѣ ея существованія я узналъ изъ приведеннаго въ сочиненіи проф. G. A. Maggi „Principii di Stereodinamica“ ея заглавія).

Повидимому, авторъ этой статьи, пользуясь своимъ собственнымъ методомъ разыскиванія частныхъ рѣшеній, а не исходя изъ общаго рѣшенія С. В. К., нашелъ тамъ всѣ случаи перманентныхъ вращеній, а также и частные алгебраическіе интегралы, соотвѣтствующіе особо-замѣчат. рѣшеніямъ моей работы, но изслѣдованія движеній не произвелъ, кромѣ вопроса объ устойчивости, и нѣкоторые интегралы привелъ въ довольно сложной формѣ.